

Meetskunde, van kunst tot kunde

P.W.H. Lemmens (ed.)

ISBN 90 6196 410 5
NUGI-code: 811

Copyright © 1993, Stichting Mathematisch Centrum, Amsterdam
Printed in the Netherlands

CWI Syllabi

Managing Editors

K.R. Apt (CWI, Amsterdam)
M. Hazewinkel (CWI, Amsterdam)
J.K. Lenstra (Eindhoven University of Technology)

Editorial Board

W. Albers (Enschede)
P.C. Baayen (Amsterdam)
R.C. Backhouse (Eindhoven)
E.M. de Jager (Amsterdam)
M.A. Kaashoek (Amsterdam)
M.S. Keane (Delft)
H. Kwakernaak (Enschede)
J. van Leeuwen (Utrecht)
P.W.H. Lemmens (Utrecht)
M. van der Put (Groningen)
M. Rem (Eindhoven)
H.J. Sips (Delft)
M.N. Spijker (Leiden)
H.C. Tijms (Amsterdam)

CWI
P.O. Box 4079, 1009 AB Amsterdam, The Netherlands
Telephone 31 -20 592 9333, telex 12571 (mactr nl),
telefax 31 -20 592 4199

CWI is the nationally funded Dutch institute for research in Mathematics and Computer Science.

Ter nagedachtenis aan prof.dr. G.R. Veldkamp

VOORWOORD

Dit boek bevat onder andere de complete herdruk (waar nodig uitgebreid en gecorrigeerd door de auteurs) van de MC-vakantiecursus 'Meetkunde' uit 1978. Daarnaast zijn nog opgenomen de herdrukken van 'Constructies met Passer en Liniaal' uit de vakantiecursus 1974, 'Vlakke Kristallografische Groepen' uit 'Excursies in de Wiskunde II' (Nijmegen) en 'Veelvlakken' uit de serie 'Achtergronden van de Schoolwiskunde' (Utrecht). Tenslotte is prof.dr. G.R. Veldkamp zo vriendelijk geweest om speciaal voor deze uitgave zijn bijdrage 'Tien Jaar Later' te schrijven, met extra aandacht voor het aspect 'bewijzen in de meetkunde'. Helaas is prof. Veldkamp ons op 16 september 1989 ontvallen. Daarom doet het mij veel genoegen dat de redactieraad heeft willen instemmen met het voorstel deze uitgave aan hem op te dragen.

Gezien de opzet voldoet deze syllabus aan de doelstellingen zoals weergegeven in het voorwoord van CWI-Syllabus 11, namelijk het (weer) beter bereikbaar maken van meestal klassiek materiaal van een overwegend inleidend karakter. Ik spreek hierbij de hoop uit dat dit werk een gewaardeerd vervolg mag zijn op de CWI-Syllabi 11, 15 en 24.

Voor de uitvoering ben ik dank verschuldigd aan met name de heer W. Aspers en zijn staf.

P.W.H. Lemmens

Inhoud

Klassieke meetkunde <i>G.R. Veldkamp</i>	1
Tien jaar later <i>G.R. Veldkamp</i>	17
Symmetrie en regelmaat <i>H.A. Lauwerier</i>	29
Constructies met passer en liniaal <i>A.B. Paalman-de Miranda</i>	47
Möbius-vlakken <i>J.H. van Lint</i>	57
Geschiedenis van de synthetische projectieve meetkunde <i>C.G.J. Nagtegaal</i>	67
Algebraïsche meetkunde <i>J.H.M. Steenbrink</i>	87
Toepassingen van meetkunde in differentiaalvergelijkingen <i>J.C.S.P. van der Woude</i>	97
Veelvlakken <i>P.W.H. Lemmens</i>	113
Vlakke kristallografische groepen <i>H. de Vries</i>	163

Klassieke Meetkunde

G.R. Veldkamp

Voordracht van de vakantiecursus uit 1978

1. INLEIDING

Een van mijn goede kennissen bracht mij enkele maanden geleden op de hoogte van het feit dat als onderwerp van deze vakantiecursus 'Meetkunde' zou worden gekozen. 'We vinden', zo betoogde hij ongeveer, 'dat de meetkunde zo langzamerhand wel wat stiefmoederlijk bedeed wordt in het onderwijs en we willen proberen daar iets aan te doen. Zou je er iets voor gevoelen aan deze vakantiecursus mee te werken?' Toen ik antwoordde dat ik hiertoe in principe wel bereid was en vroeg wat ik dan zou moeten doen, werd het gesprek ietwat vaag. 'Je moet dan één voordracht van een uur, of twee voordrachten van drie kwartier elk, houden over meetkunde, gewone meetkunde, synthetische meetkunde; kinematica mag er ook in voorkomen. Je zult er van het Mathematisch Centrum (MC) wel meer over horen.'

Tot zover dit gesprek. Ik hoorde er meer van. Een vriendelijke dame van het MC belde mij op, strikte mij definitief en vroeg mij de titel van mijn programma-onderdeel op te geven; iets waarover ik nog helemaal niet had nagedacht. Waar ze het zo gauw vandaan haalde, weet ik niet, maar ze stelde als titel 'Klassieke meetkunde' voor. Anders dan de term Klassieke Oudheid, slaat 'Klassieke meetkunde' niet op een wel-omschreven gebied en er bestaat bij mijn weten ook geen axiomastelsel voor. De offerte die hier gedaan werd, liet een groot aantal graden van vrijheid vermoeden en ik heb haar dan ook dankbaar aanvaard. Maar dat brengt natuurlijk wel de verplichting mee dat ik U moet trachten duidelijk te maken wat we onder klassieke meetkunde zullen verstaan, tenminste vandaag en in deze voordracht. In een aankondiging van de vakantiecursus 1978 lees ik: 'Een goed meetkundig inzicht kan, met name in de lineaire algebra, veel situaties verhelderen en het is in feite hypocriet hier de meetkundige achtergronden te verzwijgen. Voorts worden veel studenten (aan technische hogescholen, maar ook a.s. medici en chemici) op pijnlijke wijze geconfronteerd met een gebrek aan ruimtelijk inzicht, zodat zelfs zeer elementaire cursussen moeten worden ingelast om hierin te voorzien. Tenslotte wordt vaak over het hoofd gezien dat meetkunde een 'leuk', boeiend en inspirerend vak is.'

Ik maak hieruit op dat het niet tegen de geest van deze vakantiecursus is wanneer ik U een ruiker aanbied, geplukt in de tuin van de klassieke meetkunde. Misschien is er een bloempje bij dat in Uw eigen onderwijs niet zou misstaan. Het is zelfs mogelijk dat geur en kleur van deze op korte steel

gesneden bloemen zozeer naar Uw smaak zijn dat U de lust bekruipt eens op eigen gelegenheid in deze tuin te gaan neuzen. Het lijkt me dan ook nuttig Uw aandacht op enkele wandelgidsen te vestigen. En ik zeg er dan nog bij dat ik alles wat in deze gidsen wordt aangevoerd vandaag gemakshalve klassieke meetkunde wil noemen.

2. ENIGE LITERATUUR

1. H.S.M. COXETER, *Introduction to Geometry*, New York - Londen (1962) (XIV + 443 blz.).

De eerste druk is van 1961, de tweede van 1962, de laatste van 19.. (dit kunt U invullen bij aanschaffing). De eerste twee volzinnen van het Woord Vooraf luiden: 'In de afgelopen dertig of veertig jaar hebben de meeste Amerikanen op de een of andere manier hun belangstelling voor meetkunde verloren. Dit boek is een poging dit zozeer verwaarloosde onderwerp nieuw leven in te blazen'. Het is vrijwel onmogelijk in kort bestek een indruk te geven van de rijke inhoud en de levendige stijl en compositie van dit stimulerende werk. Het is verdeeld in de stukken I tot en met IV met als unificerende grondgedachte het begrip transformatiegroep. In I komen aan de orde driehoeken, regelmatige veelhoeken, isometrie en gelijkvormigheid in het Euclidische vlak en de Euclidische ruimte, cirkels en bollen, tweedimensionale kristallografie (de kunst van Escher, metselpatronen).

In II wordt gesproken over coördinaten, complexe getallen, de vijf regelmatige lichamen, de gulden snede en de bladstanden. Iemand met een eindexamen v.w.o. en een behoorlijke aanleg en belangstelling voor de wiskunde kan het zich allemaal eigen maken, met uitzondering misschien van enkele passages over complexe getallen. Maar het aardige is juist dat men gerust een hoofdstuk kan overslaan zonder het genoeg aan de rest te bederven.

Ook III staat op dit niveau. Hier worden de grondslagen van de meetkunde behandeld. Ik noem: de affine meetkunde, de projectieve meetkunde, de absolute meetkunde, de hyperbolische meetkunde.

In IV is het niveau wat hoger: differentiaalmeetkunde, topologie van oppervlakken en vierdimensionale meetkunde. Tot besluit een uitvoerige literatuurlijst. Aan het eind van de meeste paragrafen een aantal opgaven.

Laat ik er maar niet meer van zeggen. Het is een boek dat elke leraar in de kast moet hebben en dat na 10 jaar uit de band moet vallen omdat hij het zo vaak heeft geraadpleegd; bijvoorbeeld om een keuze-onderwerp voor een ondernemende leerling te zoeken. Coxeter behandelt de stof meetkundig. Dit is eveneens het geval in een zeer elementair boekje dat Coxeter ook een enkele maal in zijn tekst noemt, namelijk

2. I.M. YAGLOM, *Geometric Transformations*, vol. I & II, Random House, New Mathematical Library.

Het is uit het Russisch vertaald door Allen Shields (1ste druk 1962). Men kan

dit werkje zien als een modernisering van het veel oudere

3. J. PETERSEN, *Méthodes et Théories pour la Résolution des Problèmes de Constructions Géométriques*, 5ième éd., Paris, Gauthier-Villars (1931).

Verscheen voor het eerst in 1866 in het Deens. Vertalingen in het Duits, Engels, Frans en Italiaans. De Franse is van O. Chemin.

Ik wil nog de aandacht vestigen op een boekje in de landstaal dat ook in de literatuurlijst van Coxeter voorkomt.

4. O. BOTTEMA, *Hoofdstukken uit de Elementaire Meetkunde*, N.V. Servire, 's-Gravenhage (1944).

En wie zich voor de grondslagen van de affiene en Euclidische meetkunde, meetkundig behandeld en ruimschoots uitgewerkt, interesseert, kan een boek ter hand nemen dat 51 jaar geleden verscheen.

5. O. BOTTEMA, *De elementaire meetkunde van het platte vlak*, Groningen (1938).

Voor wie de zaak van algebraïsch standpunt belicht wil zien, noem ik:

6. K.W. GRUENBERG, A.J. WEIR, *Linear Geometry* (2nd ed.), Berlin etc., Springer Verlag (1977).

Het bevat, zonder de meetkundige aspecten te verwaarlozen, een flinke hoeveelheid lineaire algebra.

Meer nadruk op de meetkunde wordt gelegd in het oudere

7. E. ARTIN, *Geometric Algebra*, New York (1957).

Na een inleiding over vectorruimten, groepen, lichamen, waarderingen, volgen hoofdstukken over o.a. affiene en projectieve meetkunde, orthogonale meetkunde. Het niveau is hoger dan dat van 6.

Voor verdere literatuur zie Coxeter. Er zijn natuurlijk ook nog wel geschriften over speciale onderwerpen. Ik noem alleen een boekje over een gebied dat in de laatste dertig jaar nogal wat belangstelling heeft genoten en dat tot de elementaire meetkunde kan worden gerekend.

O. BOTTEMA, R.Z. DJORDJEVIĆ, R.R. JANIČ, D.S. MITRINOVIĆ, P.M. VIŠIČ, *Geometric Inequalities*, Groningen (1969).

Honderden ongelijkheden uit het gebied van de vlakke meetkunde, min of meer systematisch gerangschikt, sommige met bewijs, maar ook veel waarvan de lezer het bewijs zelf moet zien te vinden. Voor de aardigheid schrijf ik één

ongelijkheid hier neer: Als a , b en c de zijden en α , β en γ de tegenoverliggende hoeken van een driehoek zijn, is

$$\frac{(b\gamma - c\beta)^2 + (c\alpha - a\gamma)^2 + (a\beta - b\alpha)^2}{(a + b + c)^2} < \frac{\pi^2}{4}.$$

Er is geen bewijs bij, doch de schrijvers vermelden dat er een zeer ingewikkeld bewijs bekend is en dat het wenselijk zou zijn een eenvoudiger bewijs te verzinnen.

3. ISOMETRIEËN

In deze paragraaf wil ik beginnen met enkele grepen te doen uit de onderwerpen die in de literatuur van hoofdstuk 2 voorkomen.

Een isometrische afbeelding \mathfrak{N} van een Euclidische n -dimensionale ruimte \mathfrak{E}_n op zichzelf kan ten opzichte van een orthonormaal assenstelsel door $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{a}$ worden voorgesteld, waarin $A = (a_{ij})$ een orthonormale n, n -matrix en \mathbf{a} een vector is, beide onafhankelijk van \mathbf{x} . Voor A geldt $AA^T = A^T A = E$ waarin E de n, n -eenheidsmatrix is. Dus $\det A = \pm 1$. Het beeld van een vector $\mathbf{u} \in \mathfrak{E}_n$ is $A\mathbf{u}$. Stellen we de k -de rijvector van A even voor door \mathbf{a}_k , dan is het k -de kengetal van $A\mathbf{u}$ blijkbaar $(\mathbf{a}_k, \mathbf{u})$. Zijn $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ vectoren in \mathfrak{E}_n , dan is dus $\det(A\mathbf{u}_1, \dots, A\mathbf{u}_n) = \det(\mathbf{a}_i, \mathbf{u}_j) = \det A \det(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$. Bij een isometrie met $\det A = 1$ (die ik een *verplaatsing* zal noemen) verandert dus de oriëntatie niet. Bij een isometrie met $\det A = -1$ verandert zij wel (zo'n isometrie noem ik een *omlegging*). Ik zal mij verder tot platte vlak ($n=2$) en ruimte ($n=3$) beperken en bovendien in hoofdzaak alleen verplaatsingen beschouwen.

4. HET VLAKKE GEVAL

Voor $n=2$ is de zaak eenvoudig. Dan is A van de gedaante

$$\begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (-\pi < \phi \leq \pi) \quad (4.1)$$

Voor $\phi \neq 0$ is er één dekpunt \mathbf{d} . Dus is dan $\mathbf{x}' - \mathbf{d} = A(\mathbf{x} - \mathbf{d})$. De verplaatsing is een rotatie om \mathbf{d} over de hoek ϕ . Uit 2 punten en hun beeldpunten kan men \mathbf{d} en ϕ vinden.

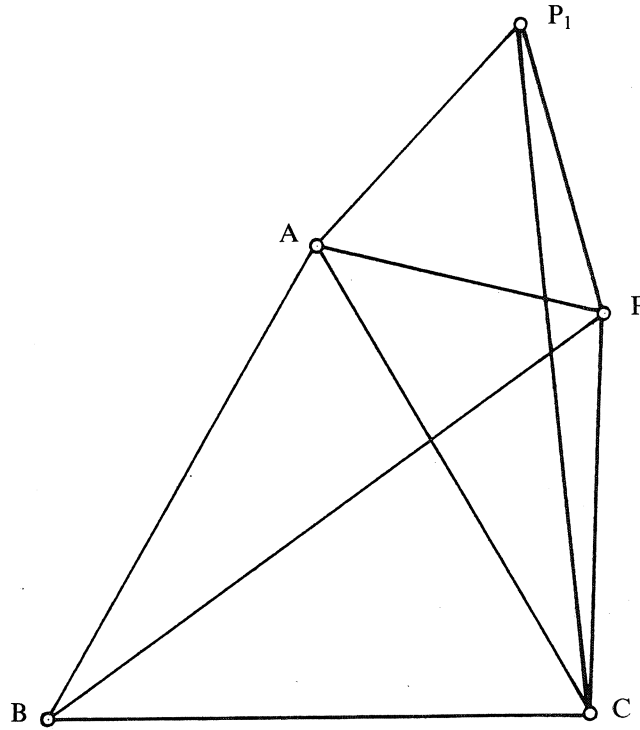
Is $\phi = 0$ dan zijn er geen dekpunten, tenzij \mathfrak{N} de identieke afbeelding is. De verplaatsing is een translatie.

Toepassingen op elementair niveau zijn er legio. Hier volgen er een tweetal.

1. DE STELLING VAN POMPEÏU. *Met de afstanden van een punt tot de hoekpunten van een gelijkzijdige driehoek als zijden kan steeds een (mogelijk ontaarde) driehoek worden geconstrueerd.*

BEWIJS. Zij P_1 het beeld van P bij de rotatie over de hoek $\pi/3$ om A die B overvoert in C . Dan is $P_1P = PA$, $P_1C = PA$. Dus is P_1PC de driehoek.

Ontaard als P_1 op de lijn PC ligt. Treedt dan en alleen dan op als P op de omcirkel van ΔABC ligt (Figuur 1).

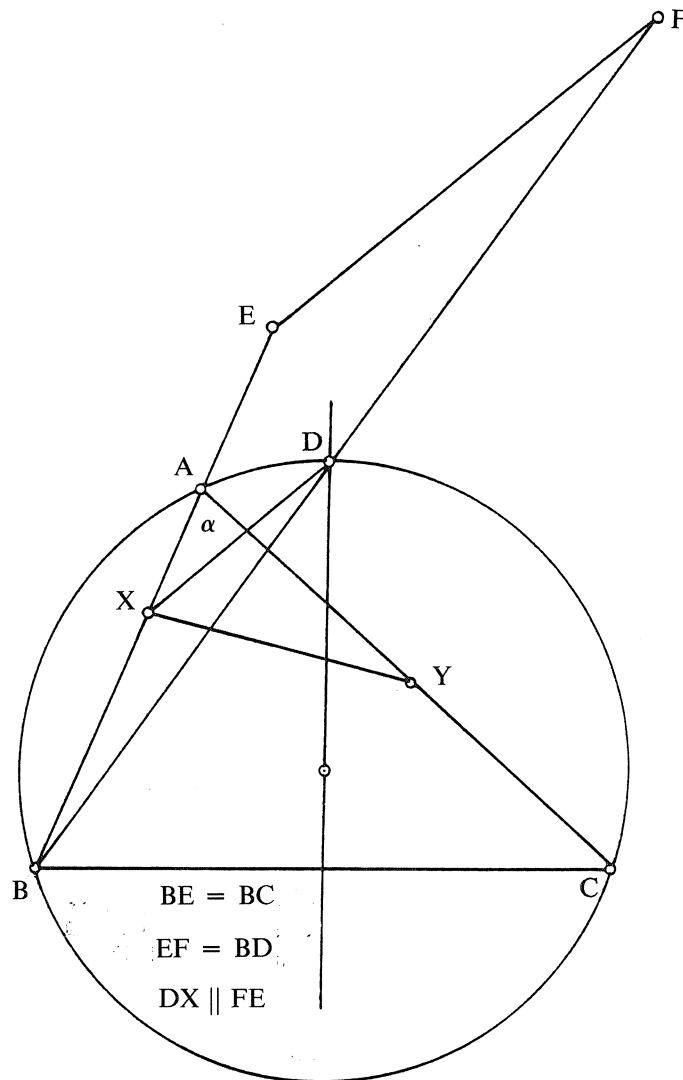


FIGUUR 1

VRAGEN. Wat is de verzameling van de punten P waarvoor de driehoek in kwestie scherphoekig, stomphoekig, rechthoekig is? Hoeveel punten P zijn er waarvoor de bedoelde driehoek rechtstreeks gelijkvormig is met een gegeven driehoek?

PROBLEEM. Zij Γ de omgeschreven cirkel van een driehoek $A_1A_2A_3$. Als $\Delta A_1A_2A_3$ gelijkzijdig is, geldt voor elk punt P van Γ dat een van de afstanden PA_k ($k = 1, 2, 3$) gelijk is aan de som van de beide andere. Wat is bij een ongelijkbenige driehoek $A_1A_2A_3$ de verzameling van het punt P met deze eigenschap? Hoeveel punten van deze verzameling liggen op Γ ? Tracht deze punten te construeren.

2. Construeer op de zijlijnen AB en AC van ΔABC de punten X en Y zo, dat $BX = XY = CY$.



FIGUUR 2

Wanneer (Figuur 2) X en Y zo op AB en AC liggen dat $BX = CY$, is er een rotatie over de hoek $BAC = \alpha$ die B op C en X op Y afbeeldt. Het dekpunt D ligt op de as van BC en $\angle BDC = \alpha$. Bijgevolg is D het midden van die boog BC van de omschreven cirkel waarop A ligt. Wanneer nu bovendien nog $BX = XY$, is $BX : DX = BC : BD$. Hieruit volgt een eenvoudige constructie voor X (zie Figuur 2); er zijn twee mogelijkheden voor XY .

5. EENVOUDIGE KINEMATICA

We beschouwen twee samenvallende n -dimensionale Euclidische ruimten \mathcal{E} en \mathcal{E}_0 . In elke ruimte is een orthonormaal assenstelsel aangenomen. De positievector van een punt in \mathcal{E} zij \mathbf{x} en die van het punt van \mathcal{E}_0 dat met het beschouwde punt samenvalt \mathbf{X} . Dan kunnen we een isometrische afbeelding van \mathcal{E} op \mathcal{E}_0 op de gebruikelijke manier door $\mathbf{X} = A\mathbf{x} + \mathbf{a}$ voorstellen. We nemen weer aan dat we met een verplaatsing te doen hebben. We zullen nu echter veronderstellen dat A en \mathbf{a} continu differentieerbare functies zijn van een reële parameter t die we de *tijd* noemen. Dan stelt $\mathbf{X} = A\mathbf{x} + \mathbf{a}$ een *beweging* van \mathcal{E} ten opzichte van \mathcal{E}_0 voor. Op elk tijdstip kan men de snelheid van \mathbf{x} vinden met behulp van de formule $\dot{\mathbf{X}} = \dot{A}\mathbf{x} + \dot{\mathbf{a}}$, waarbij de stip differentiatie naar t aanduidt. Men kan deze formule ook schrijven als

$$\dot{\mathbf{X}} = \dot{A}A^T(\mathbf{X} - \mathbf{a}) + \dot{\mathbf{a}}. \quad (5.1)$$

Ik wil nu eens het geval behandelen dat E en E_0 platte vlakken zijn. Dan is volgens (4.1):

$$A^T = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}; \quad \dot{A} = \dot{\phi} \begin{pmatrix} -\sin \phi & -\cos \phi \\ \cos \phi & -\sin \phi \end{pmatrix}$$

en dus

$$\dot{A}A^T = \dot{\phi} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \dot{\phi}A_{\pi/2} = \dot{\phi}D,$$

waarin D kennelijk een rotatie over een rechte hoek vertegenwoordigt. Blijkbaar is $\det A = \phi^2$. Op elk tijdstip waarop $\dot{\phi}$ (de hoeksnelheid) niet nul is, is er dus juist één punt (de snelheidspool) waarvan de snelheid nul is. Is $\dot{\phi} = 0$ dan is er geen punt met snelheid nul tenzij van alle punten de snelheid nul is; de beweging is dan een instante translatie: alle punten hebben dezelfde snelheid. We veronderstellen nu verder $\dot{\phi} \neq 0$ en schrijven (5.1) als

$$\dot{\mathbf{X}} = \dot{\phi}D(\mathbf{X} - \mathbf{a}) + \dot{\mathbf{a}},$$

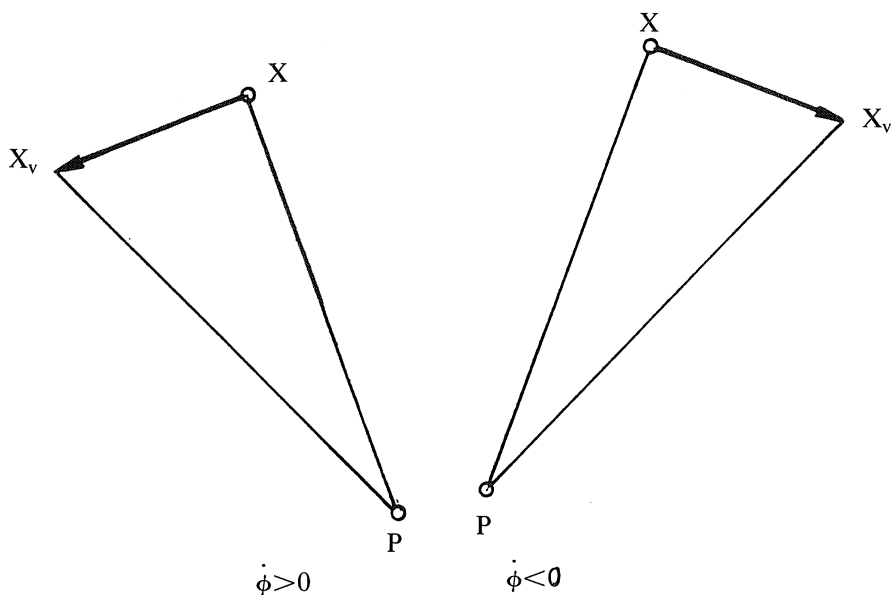
hetgeen voor de snelheidspool \mathbf{P} levert

$$\mathbf{0} = \dot{\phi}D(\mathbf{P} - \mathbf{a}) + \dot{\mathbf{a}}.$$

Blijkbaar is dus:

$$\dot{\mathbf{X}} = \dot{\phi}D(\mathbf{X} - \mathbf{P}). \quad (5.2)$$

De snelheidsvector van een punt X wordt dus gevonden door \mathbf{PX} over de hoek $\pi/2$ te draaien en daarna met $\dot{\phi}$ te vermenigvuldigen. Zetten we de snelheid van X af als vector \mathbf{XX}_v , met X als beginpunt, dan geeft dit het onderstaande beeld.

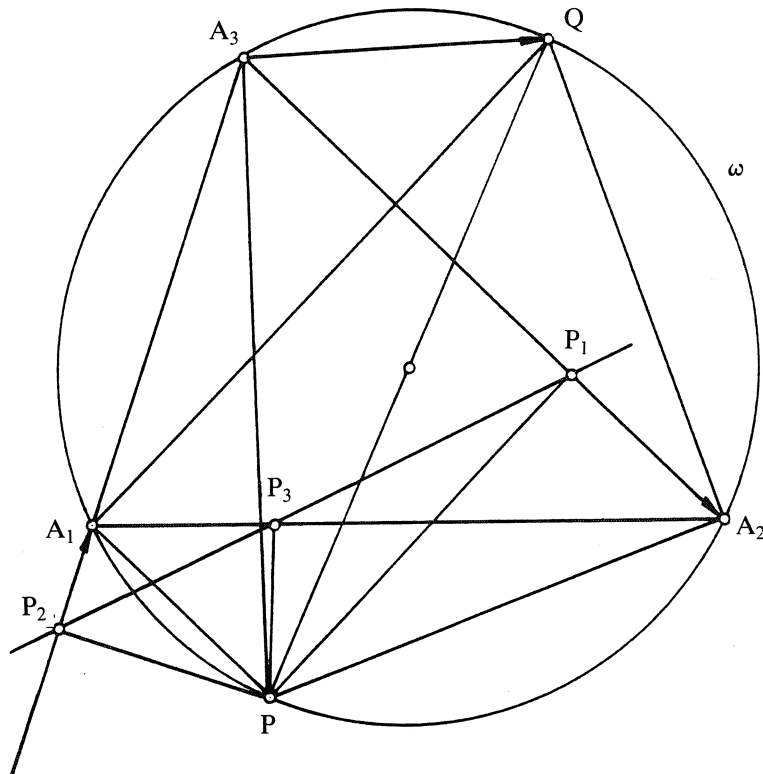


FIGUUR 3

Op elk tijdstip hangt de vorm van ΔPXX_v , alleen af van de hoeksnelheid, niet van het gekozen punt X . De snelheidsverdeling op een bepaald tijdstip stemt dus overeen met die van een rotatie met hoeksnelheid $\dot{\phi}$. Instantaan is elke beweging dus een translatie of een rotatie. Een gevolgtrekking uit het bovenstaande. De uiteinden van de snelheidsvectoren van de hoekpunten van een veelhoek zijn de hoekpunten van een tweede veelhoek, gelijkvormig met de eerste. Van deze allereerste beginselen van de vlakke kinematica zijn allerlei aardige meetkundige toepassingen mogelijk. Ik beperk me tot de volgende twee.

1. Uit een punt P in het vlak van $\Delta A_1A_2A_3$ laat men de loodlijnen neer op de zijden. De voetpunten zijn P_1, P_2, P_3 (Figuur 4). Wanneer zijn P_1, P_2 en P_3 collineair?

We stellen ons voor dat de figuur een momentopname is van een in zijn vlak bewegende driehoek en dat P op dat moment de snelheidspool is. Als nu $\mathbf{P}_2\mathbf{A}_1$ de snelheidsvector is van P_2 , ligt de snelheidsverdeling vast. Nu zijn P_1, P_2 en P_3 dan en alleen dan collineair als de uiteinden van hun snelheidsvectoren collineair zijn, dus als $\mathbf{P}_1\mathbf{A}_2$ de snelheidsvector is van P_1 . De snelheidslijn van A_1 is de loodlijn in A_1 op PA_1 . Daar P_2, A_1 en A_3 collineair zijn, ligt het eindpunt Q van de snelheidsvector van A_3 op deze loodlijn. Dus A_1 en A_3 liggen op de cirkel ω met PQ als middellijn. Om soortgelijke reden ligt ook A_2 hierop. Derhalve: P_1, P_2 en P_3 zijn dan en alleen dan collineair als P op de omgeschreven cirkel ω van $\Delta A_1A_2A_3$ ligt. De lijn l_P waarop de punten P_k liggen, is de bekende rechte van Wallace.



FIGUUR 4

Nog even een uitweiding. Als P niet op ω ligt, zijn P_1 , P_2 en P_3 dus hoekpunten van een driehoek, de voetpuntdriehoek van P . Zij F_P daarvan de oppervlakte en F die van $\Delta A_1A_2A_3$. Denk ergens in het vlak een rechthoekig assenstelsel aangenomen. De coördinaten van P_1 , P_2 en P_3 zijn lineaire functies van de coördinaten x en y van P . Dus is $F_P = f(x,y)$, waarin f een kwadratische functie is van x en y . Meetkundig stelt de vergelijking $f(x,y) = F_P$ een kegelsnede voor. Bij veranderlijke F_P krijgt men een stelsel kegelsneden. Zij zijn homothetisch en hebben een gemeenschappelijk middelpunt. Maar voor $F_P = 0$ vinden we ω . Dus al deze kegelsneden zijn cirkels, concentrisch met ω . Vandaar de stelling: *de verzameling van de punten P waarvan de voetpuntdriehoeken een gegeven oppervlakte hebben, is een cirkel concentrisch met ω .* We kunnen nu schrijven: $kg(x,y) = F_P$ waarin k een constante is en $g(x,y) = 0$ de genormeerde vergelijking van ω is (dus de gedaante $x^2 + y^2 + \dots$ enz. $= 0$ heeft). Maar is $g(x,y)$ ook op te vatten als de macht μ_P van P t.o.v. ω , zodat $k\mu_P = F_P$, geldend voor elk punt P . Kies P in het middelpunt M van ω . Dan blijkt $-kR^2 = \frac{1}{4}F$ waarin R de straal is van ω . Eliminatie van k geeft

$$F_P = -\frac{\mu_P}{4R^2}F.$$

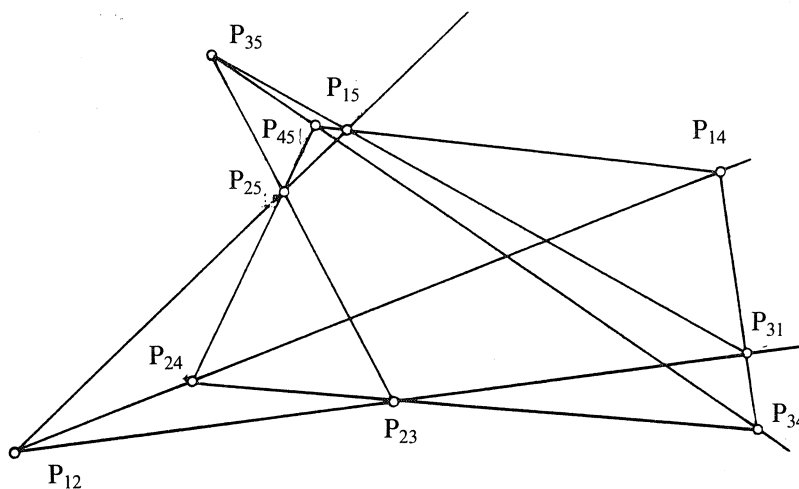
Voor punten binnen ω hebben $\Delta A_1 A_2 A_3$ en $\Delta P_1 P_2 P_3$ blijkbaar dezelfde en voor punten buiten ω tegengestelde oriëntatie.

2. Dit voorbeeld vereist een opmerking vooraf. Als drie samenvallende vlakken $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$ ten opzichte van elkaar bewegen, zijn er op elk tijdstip 3 polen (= snelheidspolen). Ik noem ze P_{12}, P_{23}, P_{31} (P_{21}, P_{32}, P_{31} zijn dezelfde punten als de drie genoemde) en we kunnen aan een punt drie snelheden onderscheiden: ν_{12} (beweging $\mathcal{E}_1/\mathcal{E}_2$ van \mathcal{E}_1 ten opzichte van \mathcal{E}_2), ν_{23} en ν_{31} . Hiervoor geldt $\nu_{12} + \nu_{23} + \nu_{31} = \mathbf{0}$; dit is het bekende 'parallelogram van snelheden', bekend uit de elementaire natuurkunde. Toegepast op het punt P_{31} wordt dit $\nu_{12} + \nu_{23} = \mathbf{0}$. Echter is: $\nu_{12} \perp P_{12}P_{31}$ en $\nu_{23} \perp P_{23}P_{31}$. Conclusie:



FIGUUR 5

P_{12}, P_{23} en P_{31} zijn collineair. Neem nu vijf vlakken die ten opzichte van elkaar bewegen. Dan zijn er $5! : 2!3! = 10$ polen waarvan we aannemen dat ze alle verschillend zijn. We weten dat $\{P_{12}, P_{23}, P_{31}\}$, $\{P_{12}, P_{24}, P_{41}\}$ en $\{P_{12}, P_{25}, P_{51}\}$ collineaire drietallen zijn. Het snijpunt van $P_{24}P_{25}$ en $P_{41}P_{51}$ is P_{45} , dat van $P_{25}P_{23}$ en $P_{51}P_{31}$ is P_{35} en dat van $P_{23}P_{24}$ en $P_{31}P_{41}$ is P_{34} . Maar aangezien $\{P_{45}, P_{35}, P_{34}\}$ een collineair drietal is, staat hier de stelling van Desargues. De volledige figuur bevat 10 punten en 10 lijnen; op elke lijn liggen 3 van deze 10 punten en door elk punt gaan 3 van de 10 lijnen. De figuur is een configuratie die als $Cf(10_3, 10_3)$ wordt genoteerd (eerst de punten noemen, dan de lijnen). Bij 6 verschillende vlakken ontstaat zo de configuratie $Cf(20_3, 15_4)$, de configuratie van Hesse.



FIGUUR 6

6. HET DRIEDIMENSIONALE GEVAL

Wanneer we voor een driedimensionale verplaatsing $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{a}$ vragen naar een dekpunt \mathbf{d} komt dit neer op de vraag of de vergelijking $(A - E)\mathbf{x} + \mathbf{a} = \mathbf{0}$ oplossingen heeft. Voor een antwoord hebben we nodig de rang van de matrix $A - E$. Uit $A^T(A - E) = (E - A^T) = (E - A)^T$ volgt $\det(A - E) = \det(E - A) = -\det(A - E)$. Dus $\det(A - E) = 0$. Bijgevolg heeft $(A - E)\mathbf{x} + \mathbf{a} = \mathbf{0}$ geen oplossingen of oneindig veel. De situatie is dus essentieel anders dan in het platte vlak. Dat $\det(A - E) = 0$, betekent dat A een eigenwaarde 1 heeft. Hieruit volgt dat de karakteristieke vergelijking als

$$\lambda^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 + (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda - 1 = 0$$

kan worden geschreven. Hieruit is gemakkelijk af te leiden dat 1 òf een enkelvoudige òf een drievoudige eigenwaarde is. Het laatste geval treedt dan en slechts dan op als $a_{11} + a_{22} + a_{33} = 3$, dus als $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1$, dat is, als $A = E$. In dit geval is de verplaatsing een translatie. We laten het verder buiten beschouwing. Dus 1 is een enkelvoudige eigenwaarde en $r(A - E) = 2$. In het vlakke geval is er dan één dekpunt. In het driedimensionale geval kunnen we ook een uitspraak doen. Zij $A - E = B$ en B^+ de matrix die uit B ontstaat door aan B als vierde kolom de vector \mathbf{a} toe te voegen. *Dan is er geen dekpunt of een rechte van dekpunten al naar gelang $r(B^+) = 3$ of $r(B^+) = 2$.* Bij de eigenwaarde 1 behoort een ééndimensionale eigenruimte, opgespannen laten we zeggen door de eenheidsvector \mathbf{e} . Dus $A\mathbf{e} = \mathbf{e}$. Hieruit besluiten we dat een rechte $\mathbf{x} = \mathbf{z} + \lambda\mathbf{e}$ met richtingsvector \mathbf{e} als beeld heeft de rechte $\mathbf{x} = A\mathbf{z} + \mathbf{a} + \lambda A\mathbf{e} = A\mathbf{z} + \mathbf{a} + \lambda\mathbf{e}$, die evenwijdig is met het origineel. Het ligt nu wel voor de hand te vragen of er onder al de ∞^2 rechten met richtingsvector \mathbf{e} eentje is die samenvalt met haar origineel, dus een dekrechte is. Om de vraag te beantwoorden, moeten we de vergelijking: $A\mathbf{z} + \mathbf{a} + \lambda\mathbf{e} = \mathbf{z} + \mu\mathbf{e}$ bestuderen. De scalair μ hangt lineair van λ af en we zien gemakkelijk dat $\mu = \lambda + \nu$ waarin ν niet meer van λ afhangt. De vergelijking kan dus op de vorm

$$B\mathbf{z} + \mathbf{a} - \nu\mathbf{e} = \mathbf{0} \quad (6.1)$$

worden gebracht. Voor veranderlijke $\nu \in \mathbb{R}$ staan hier oneindig veel vergelijkingen. Nodig en voldoende opdat (6.1) oplossingen heeft, is dat de rang van de matrix die uit B ontstaat door toevoeging van de kolomvector $\mathbf{a} - \nu\mathbf{e}$ de rang 2 heeft. Daar $A\mathbf{e} = \mathbf{e}$, is ook $A^T\mathbf{e} = \mathbf{e}$ en dus $B^T\mathbf{e} = \mathbf{0}$. Is \mathbf{b}_k de k -de rijvector van B dan is dus $e_1\mathbf{b}_1 + e_2\mathbf{b}_2 + e_3\mathbf{b}_3 = \mathbf{0}$ en de nodige en voldoende voorwaarde voor oplosbaarheid van (6.1) luidt dus $(\mathbf{e}, \mathbf{a} - \nu\mathbf{e}) = 0$, dat wil zeggen: $\nu = (\mathbf{e}, \mathbf{a})$. We stellen $\mathbf{a} - (\mathbf{e}, \mathbf{a})\mathbf{e} = \mathbf{b}$ en vinden dan als oplossingsverzameling van $B\mathbf{z} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$ de rechte l met vergelijking

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + \lambda\mathbf{e}, \quad (6.2)$$

waarin \mathbf{p} een particuliere oplossing is, die we nog zo kunnen kiezen dat $(\mathbf{p}, \mathbf{e}) = 0$. Het beeld van een punt van l is:

$$A(\mathbf{p} + \lambda\mathbf{e}) + \mathbf{a} = A\mathbf{p} + \mathbf{a} + \lambda\mathbf{e} = B\mathbf{p} + \mathbf{a} + \mathbf{p} + \lambda\mathbf{e} = \mathbf{p} + \lambda\mathbf{e} + (\mathbf{e}, \mathbf{a})\mathbf{e}.$$

Elk punt van l ondergaat dus een translatie langs l met translatievector $\mathbf{t} = (\mathbf{e}, \mathbf{a})\mathbf{e}$.

Het beeld van een willekeurig punt $\mathbf{x} \in \mathcal{E}_3$ is:

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{a} = A\mathbf{x} + \mathbf{b} + \mathbf{t} = A(\mathbf{x} - \mathbf{p}) + \mathbf{p} + \mathbf{t},$$

zodat

$$\mathbf{x}' - \mathbf{x} = A(\mathbf{x} - \mathbf{p}) - (\mathbf{x} - \mathbf{p}) + \mathbf{t}. \quad (6.3)$$

De vector $A(\mathbf{x} - \mathbf{p}) - (\mathbf{x} - \mathbf{p})$ staat loodrecht op \mathbf{t} . Uit (6.3) volgt dus $|\mathbf{x}' - \mathbf{x}| \geq |\mathbf{t}|$ met gelijkheid dan en slechts dan als \mathbf{x} op l ligt. *We kunnen dus de dekrechte l ook karakteriseren als de verzameling van de punten die minimale afstand hebben tot hun beeldpunten.* Hieruit blijkt dat l niet afhangt van de keuze van het assenstelsel.

Om (6.3) nog iets verder uit te pluizen, schrijven we $\mathbf{x} - \mathbf{p} = \epsilon\mathbf{e} + \mathbf{n}$ waarin $(\mathbf{n}, \mathbf{e}) = 0$. Dan is

$$\mathbf{x}' - \mathbf{x} = A\mathbf{n} - \mathbf{n} + \mathbf{t}.$$

Daar de oriëntatie behouden blijft, is de hoek α tussen \mathbf{n} en $A\mathbf{n}$ voor alle vectoren \mathbf{n} loodrecht op l dezelfde. Om α te vinden, kunnen we dus van een speciale vector gebruik maken. Neem bijvoorbeeld $\mathbf{v}^T = (a_{11} - 1, a_{12}, a_{13})$. Deze staat loodrecht op \mathbf{e} ; het kwadraat van zijn lengte is $2(1 - a_{11})$ en $(A\mathbf{v})^T = (1 - a_{11}, -a_{21}, -a_{31})$. Dus is

$$\cos \alpha = \frac{-(1 - a_{11})^2 - a_{21}a_{12} - a_{13}a_{31}}{2(1 - a_{11})} = \frac{(1 - a_{11})(\text{sp } A - 1)}{2(1 - a_{11})},$$

zodat

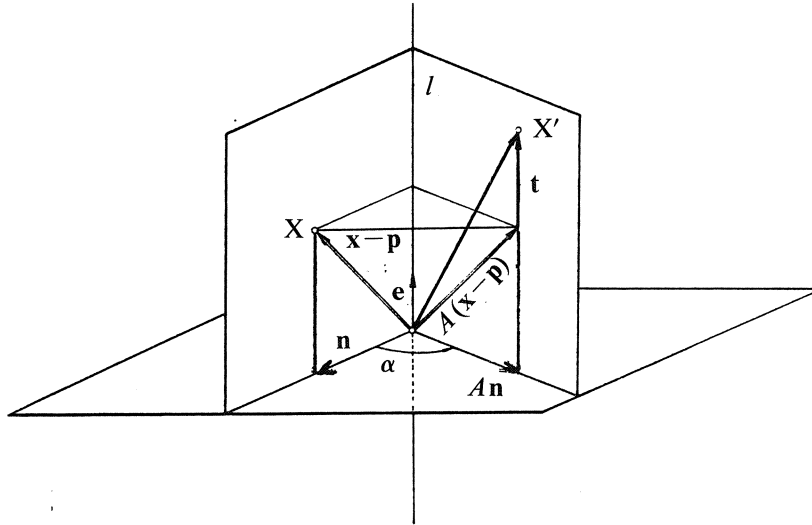
$$\cos \alpha = \frac{1}{2}(\text{sp } A - 1). \quad (6.4)$$

Figuur 7 illustreert het bovenstaande. Het beeld X' van een punt X wordt gevonden door de ruimte om l te schroeven (rotatiehoek α , translatievector \mathbf{t}). Voor $\mathbf{t} = \mathbf{0}$ is de verplaatsing een rotatie om de as l ; voor $\alpha = 0$ is zij een translatie.

7. RUIMTELIJKE KINEMATICA

In hoofdstuk 5 hebben we de formule $\mathbf{X} = A\mathbf{x} + \mathbf{a}$ voor de beweging $\mathcal{E}/\mathcal{E}_0$ van twee samenvallende n -dimensionale ruimten ten opzichte van elkaar bekeken voor het geval $n = 2$. Heel in het kort zeggen we nu iets over het geval $n = 3$. De snelheid van \mathbf{x} is $\dot{\mathbf{X}} = A\dot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{a}} = \dot{A}A^T A\mathbf{x} + \dot{\mathbf{a}}$. Daar $AA^T = E$, is $\dot{A}A^T + A\dot{A}^T = O$ waarin O de 3,3-nulmatrix is. Hieruit blijkt dat $\dot{A}A^T$ een scheefsymmetrische matrix is. We kunnen dus schrijven:

$$\dot{A}A^T = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.1)$$



FIGUUR 7

Voeren we in de vector $\omega \in \mathcal{E}_0$ bepaald door $\omega^T = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ dan is dus $\dot{X} = \omega \times Ax + \dot{a}$. Uit (7.1) is af te leiden dat AA^T alleen de rang nul of twee kan hebben. Is de rang nul dan is $A = O$ en de beweging is een translatie. We veronderstellen in het vervolg $r(AA^T) = 2$, dus $r(A) = 2$. Er zijn dan precies 2 eenheidsvectoren van \mathcal{E} die aan $Az = 0$ voldoen. Zij e één hiervan, dan is dus $Ae = 0$. Daar $AA^T\omega = \omega \times \omega = 0$ is $A^T\omega$ lineair afhankelijk van e . Er is dus een scalar $\omega \neq 0$ met $\omega = \omega Ae$; ω heet de hoeksnelheid van de beweging $\mathcal{E}/\mathcal{E}_0$ op het tijdstip t en ω de hoeksnelheidsvector. Twee punten x en y van \mathcal{E} hebben dan en alleen dan dezelfde snelheid als $\omega \times A(x-y) = 0$, dus als $A(x-y)$ lineair afhankelijk is van ω of - wat op hetzelfde neerkomt - als $x-y$ lineair afhankelijk is van e . *Op het tijdstip t hebben twee punten van \mathcal{E} dan en alleen dan dezelfde snelheid als hun verbindingslijn e als richtingsvector heeft.* Een lijn $l \in \mathcal{E}$ met richtingsvector e kan door $x = p + \lambda e$, $(p, e) = 0$ worden voorgesteld. Alle punten van l hebben de snelheid $\omega \times Ap + \dot{a}$. Deze valt dan en slechts dan langs l als we p - en dus l - zo kiezen dat $Ae \times (\omega \times Ap) + Ae \times \dot{a} = 0$. Dit geeft voor p :

$$p = \omega^{-1} A^T (Ae \times \dot{a}). \quad (7.2)$$

Er bestaat dus in \mathcal{E} een lijn waarvan alle punten dezelfde langs deze lijn gerichte snelheid hebben. Deze snelheid is:

$$v_\tau = \omega \times Ap + \dot{a} = (Ae, \dot{a}) Ae \quad (7.3)$$

en wordt de translatiesnelheid van de beweging $\mathcal{E}/\mathcal{E}_0$ genoemd. Blijkbaar is nu

$$\dot{X} = \omega \times A(x-p) + v_\tau. \quad (7.4)$$

De lijn van \mathcal{E}_0 waarmee l samenvalt, is $\mathbf{X} = A\mathbf{p} + \mathbf{a} + \lambda A\mathbf{e}$. Is W een willekeurig punt hiervan met positievector $A\mathbf{p} + \mathbf{a} + \mu A\mathbf{e}$ en X het punt van \mathcal{E}_0 waarmee $\mathbf{x}\in\mathcal{E}$ samenvalt, dan is $\mathbf{WX} = A(\mathbf{x} - \mathbf{p}) - \mu A\mathbf{e}$. Dus kunnen we voor (7.4) schrijven:

$$\dot{\mathbf{X}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{WX} + \mathbf{v}_\tau.$$

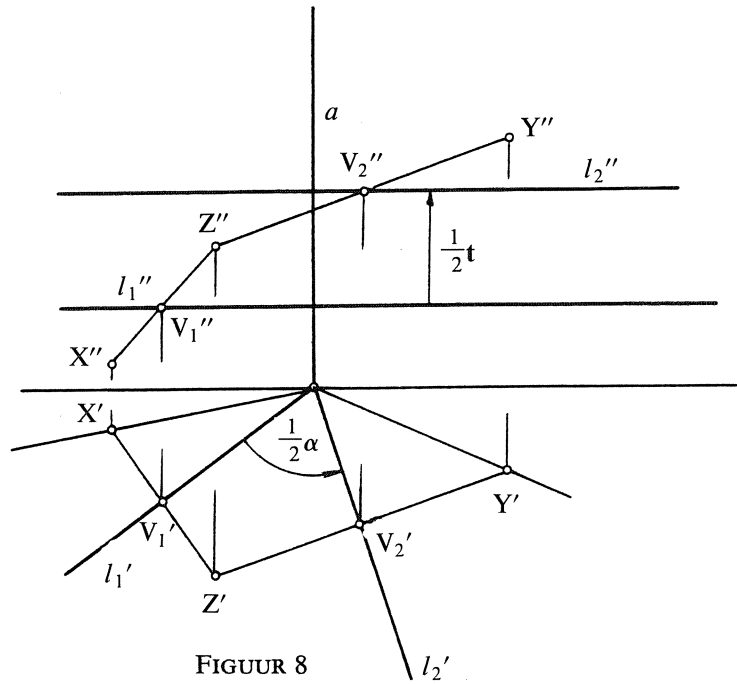
De snelheidsverdeling bij elke ruimtelijke beweging die geen translatie is, stemt dus overeen met die van een schroefbeweging met l als schroefas. De schroefas is te karakteriseren als de verzameling van de punten met minimale snelheid; zij hangt dus niet van de keuze van het assenstelsel af.

8. MEETKUNDIGE BESCHOUWING VAN SCHROEVINGEN

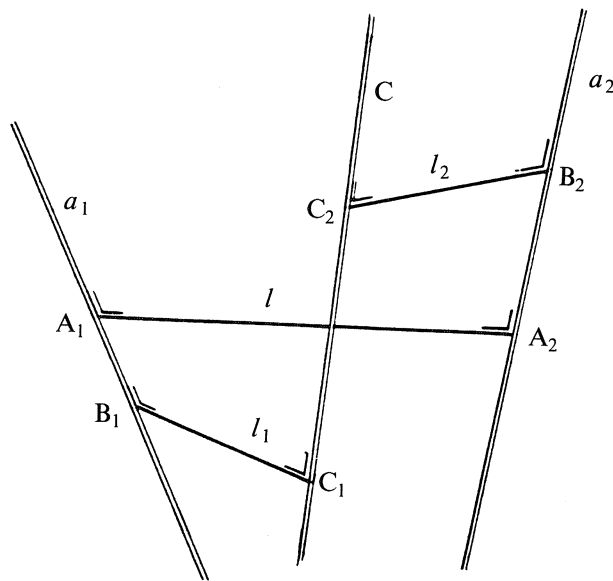
Een rotatie van de ruimte om een as a kan worden verkregen als produkt van twee lijnspiegelingen aan rechten die a in hetzelfde punt loodrecht snijden. Het is gemakkelijk te bewijzen dat een schroefing $S(a, \alpha, \mathbf{t})$ met as a , rotatiehoek α en translatievector \mathbf{t} eveneens het produkt is van twee lijnspiegelingen L_1 en L_2 aan rechten l_1 en l_2 die a loodrecht snijden en elkaar kruisen. Hierbij kan l_1 nog willekeurig (mits a loodrecht snijdend) worden gekozen; l_2 is het beeld van l_1 bij de schroefing $S(a, 1/2\alpha, 1/2\mathbf{t})$. Het uitermate simpele meetkundige bewijs is met gebruikmaking van de eerste beginselen van de zozeer verguisde beschrijvende meetkunde in Figuur 8 weergegeven.

Deze stelling kan dienen om meetkundig te bewijzen dat het produkt S_2S_1 van twee schroefingen $S_1(a_1, \alpha_1, \mathbf{t}_1)$ en $S_2(a_2, \alpha_2, \mathbf{t}_2)$ weer een schroefing is. In Figuur 9 is verondersteld dat a_1 en a_2 elkaar kruisen (we laten het geval dat a_1 en a_2 coplanair zijn aan de lezer over).

De loodrechte transversaal van a_1 en a_2 is met l aangegeven. De beelden van l bij de schroefingen $S_4(a_1, -1/2\alpha_1, -1/2\mathbf{t}_1)$ en $S_5(a_2, 1/2\alpha_2, 1/2\mathbf{t}_2)$ zijn opvolgend l_1 en l_2 . De lijnspiegelingen aan l_1 , l_2 en l noemen we in deze volgorde L_1 , L_2 en L (Figuur 9). Dan is $S_1 = LL_1$ en $S_2 = L_2L$. Dus $S_2S_1 = L_2LLL_1 = L_2L_1$. Als bijzonder geval noteren we: het produkt van twee rotaties om elkaar kruisende assen is een schroefing. Zijn F_1 en F_2 twee congruente figuren in de ruimte dan is er een schroefing waarbij F_2 het beeld is van F_1 . Voor het bewijs behoeven we slechts voor F_1 en F_2 gelijk georiënteerde rechthoekige assenstelsels $O_1X_1Y_1Z_1$ en $O_2X_2Y_2Z_2$ te nemen. Is l_1 de snijlijn van de vlakken $O_1X_1Y_1$ en $O_2X_2Y_2$ dan is er een rotatie R_1 om l_1 die $O_1X_1Y_1Z_1$ overvoert in een gelijk georiënteerd assenstelsel $OXYZ$ waarvan het vlak OXY met $O_2X_2Y_2$ samenvalt. Er is verder een rotatie R_2 om een as loodrecht op $O_2X_2Y_2$ waardoor $OXYZ$ in $O_2X_2Y_2Z_2$ overgaat. Bij de schroefing $S = R_2R_1$ gaat dus $O_1X_1Y_1Z_1$ over in $O_2X_2Y_2Z_2$. Bijzondere gevallen kan de lezer zelf behandelen.



FIGUUR 8



FIGUUR 9

Tien Jaar Later

G.R. Veldkamp

1. INLEIDING

De titel riekt naar Dumas-père maar is chronologisch exact en ik weet geen betere te verzinnen. Trouwens de geschiedenis herhaalt zich. Als voorheen word ik door een goede kennis benaderd, ditmaal met de mededeling dat het in de bedoeling ligt de teksten van de MC-vakantiecursus *Meetkunde* uit 1978 opnieuw uit te geven, gevolgd door een verzoek om medewerking. Zou ik de tekst van toen nog eens na willen lezen om eventueel wijzigingen of toevoegingen aan te brengen of mogelijk in te haken op nieuwe ontwikkelingen? Alweer vrijheid genoeg en medewerking zij dan ook, evenals vroeger, gaarne verleend. Voor wijzigingen in de tekst lijkt geen directe aanleiding te bestaan, hoewel natuurlijk alles wat er staat ook anders had kunnen worden gepresenteerd. De mogelijkheid om dezelfde onderwerpen op zeer uiteenlopende manieren te behandelen, is trouwens een van de charmes van de meetkunde. Wat toevoegingen aangaat, er is in de afgelopen jaren nog heel wat literatuur verschenen die ter aanvulling van *paragraaf 2* van de voordracht kan dienen. In het volgende leg ik mij de uiterste beperking op.

2. AANVULLING LITERATUUR

ELMER G. REES, *Notes on Geometry*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1983), (VI + 107 blz.). Serie Universitext.

In dit werkje komen aan de orde de *Euclidische*, de *projectieve* en de *hyperbolische meetkunde*. Leidraad bij de behandeling is Felix Klein's Erlanger Programm (1872). Zeer veel opgaven (oefeningen) tussen de tekst en een honderdtal vraagstukken waaronder zeer pittige. In het *Woord Vooraf* zegt de auteur o.m.:

'In recent years, geometry has played a lesser role in undergraduate courses than it has ever done. Nevertheless it still plays a leading role in mathematics at a higher level. Its central role in the history of mathematics has never been disputed. It is important therefore, to introduce some geometry into university syllabuses.'

Het hele citaat had als inleiding tot de voordracht van 1987 kunnen dienen. In vijf jaar is er wat de plaats van de meetkunde in het wiskunde-onderwijs aangaat, blijkbaar weinig veranderd.

De auteur verklaart verder dat hij bij zijn behandeling van de meetkunde de stof zal gebruiken uit de lineaire algebra, de groepentheorie, de theorie van de metrische ruimten en de complexe analyse, voor zover die aan beginnende studenten wordt onderwezen. 'The notes are based', zo zegt hij 'on a course whose aim was twofold, firstly, to introduce the students to some geometry and, secondly, to deepen their understanding of topics that they have already met.'

Een welsprekend pleidooi, dit *Woord Vooraf*, dunkt mij om voor de meetkunde een waardige plaats in het wiskunde-onderwijs op elk niveau te reserveren.

Tot besluit zij hier een boek genoemd dat in 1978 eigenlijk nog bezig was te verschijnen en toen niet is opgegeven bij de literatuur.

MARCEL BERGER, *Géométrie* (5 Vol.), Cedic/Fernand Nathan, Paris (1977).

De 5 delen behandelen achtereenvolgens:

1. Action de groupes, espaces affines et projectifs.
2. Espaces euclidiens, triangles, cercles et sphères.
3. Convexes et polytopes, polyèdres réguliers, aires et volumes.
4. Formes quadratiques, quadriques et coniques.
5. La sphère pour elle-même, géométrie hyperbolique, l'espace des sphères.

Hier wordt meetkunde op niveau aangeboden. De studie vereist inspanning, zeer veel inspanning zelfs en volharding, want, met een variant op van Deysse, het is een boek 'hard als staal, zo geserreerd is het geschreven'. Van deel 1 en 2 zijn in 1987 vertalingen in het Engels verschenen bij Springer-Verlag. Bij laatstgenoemde uitgever zag in 1984 in de serie 'Problem Books in Mathematics' het licht:

Problems in Geometry, VIII + 266 pag.

Dit is een vertaling door Silvio Levy van het in 1982 by Cedic/Nathan verschenen *Problèmes de Géométrie*, door Marcel Berger, e.a. In het *Woord Vooraf* heet het dat de vijfdelige *Géométrie* gunstig is ontvangen doch niettemin:

'many readers found the text too concise and the exercises at the end of each chapter too difficult and regretted the absence of any hints for the solution of the exercises.'

Dit Problem Book is dan ook bedoeld om aan deze bezwaren tegemoet te komen en kan uitstekend als ondersteuning dienen bij de studie van het grote werk.

3. HUIDIGE STAND VAN ZAKEN

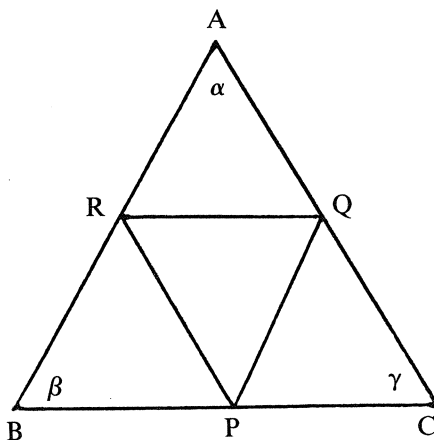
Van een emeritus-hoogleraar moet men niet al te veel meer verwachten en zeker geen in elk onderdeel volledig onderbouwd betoog, waarin een overzicht wordt gegeven van de plaats die de meetkunde thans inneemt bij het wiskunde-onderwijs aan leerlingen van scholen voor voortgezet onderwijs. Hij kan slechts verslag doen van enkele zaken die hem in de afgelopen tien jaren als vermeldenswaard zijn voorgekomen. Van een aanmerkelijke verandering - of is een van de termen *verbetering*, *verduidelijking*, *concretisering* gepaster? -

in de positie van het meetkunde-onderwijs is daarbij weinig te bespeuren.

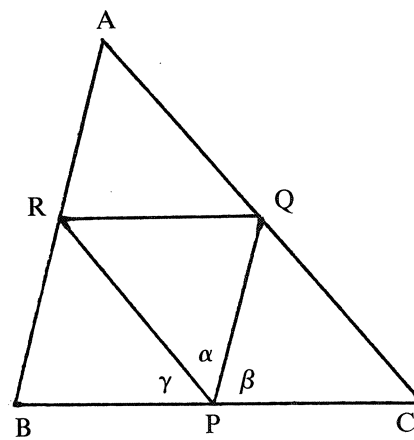
Wanneer op een bepaald gebied verandering uitblijft, is men nogal eens geneigd tot de uitspraak dat de belanghebbenden ingedut zijn, woorden als *geestelijke traagheid*, *verstarring* worden gehoord. Het moet uitdrukkelijk worden gezegd dat zulk een oordeel in dit geval volkomen misplaatst is. Integendeel, op het terrein van wat men de vernieuwing van het wiskunde-onderwijs (inclusief dat in de meetkunde) pleegt te noemen, is zeer veel werk verzet. En dat niet alleen in de jaren na 1978 maar reeds ver daarvoor. Het begintijdstip kan tot op zekere hoogte willekeurig gekozen worden, want onderwijs-vernieuwing behoort een continu proces te zijn. Onderwijs is pas goed als er beweging in zit en wel *beheersbare beweging*. Kleine versnellingen doen geen schade, eerder nut, grote zijn, als bij jachtvliegers, nadelig voor het zicht en het bewustzijn. Meestal gaat het wel goed, want ook in het onderwijsgebeuren schijnt een soort zelfrichtende automaat te zijn ingebouwd. Discontinuïteiten echter zijn noodlottig en kunnen jaren nawerken. Zo'n discontinuïteit was er omstreeks 1960, verbonden met de namen Dieudonné, Papy; exponenten van het Bourbakisme. Verzamelingen, structuren, gebruik van symbolen, van meet af een axiomatische opbouw van de meetkunde (Papy) dat waren zo enkele slagwoorden. Bij examens moest objectiviteit hoog in het vaandel staan; multiple choice was, ten dele, de oplossing. Het werk van Dieudonné en medestanders was de grondslag voor de New Math die enkele jaren na een triomferend debuut, onderhand als een pedagogisch-didactische blunder van ongewoon formaat, roemloos het veld moest ruimen. De New Math heeft haar sporen nagelaten en het zou onbillijk zijn te beweren dat zij uitsluitend van verderfelijke invloed is geweest. In Engeland had men geheel andere opvattingen dan de Bourbakisten: aan beginners moet men de wiskunde beslist niet als autonome wetenschap aanbieden, maar altijd in nauw verband met praktische toepassingen. Bij velen in ons land vond dit standpunt weerklank. De commercie deed haar intrede in het wiskunde-onderwijs: een bekende uitgever van schoolboeken zond een team deskundigen naar Schotland om daar het onderwijs te bestuderen. Een onschuldige vorm van bedrijfsspionage. De expeditie keerde huiswaarts met de Schotse Methode. Deze heeft grote invloed gehad op de uitwerking van de wiskundeprogramma's voor het voortgezet onderwijs.

Gezaghebbende deskundigen op het gebied van didactiek en methodiek komen leraren en aanstaande leraren te hulp bij het zoeken naar de meest geschikte manieren om de in deze programma's opgenomen stof aan de kinderen duidelijk te maken. Nochtans klagen universitaire docenten dat ze bij herhaling in een vacuüm tasten, wanneer ze bij een college aan beginnende wiskundestudenten een betoog willen illustreren met een voorbeeld uit de elementaire algebra of meetkunde. Bepaald geschrokken ben ik bij de mededeling van zo'n docent - een emeritus wordt soms als biechtvader gebruikt - dat ze (de beginners) 'niets kunnen bewijzen, zelfs niet weten wat een bewijs is en er nooit een hebben gezien'. Ietwat overdreven dacht ik. Maar het werd door anderen bevestigd en een daarvan had zelfs een verklaring. Ongeveer aldus. Waar leerden we vroeger bewijzen? Antwoord: bij de meetkundelessen. Niet

bij de algebra, daar werden ten hoogste formules afgeleid. Welnu, tegenwoordig is alles zo'n beetje algebra. Wat er nog aan meetkunde over is, staat in de leerboeken tussen de algebra-hoofdstukken. En, omdat er zo geen bewijzen meer nodig zijn, weten de leraren zelf ook niet meer hoe je een bewijs moet geven. Meer dan ietwat overdreven dacht ik. Hoewel, twee maanden later kwam mij onder ogen het programma van de Studiedag 1987 van de *Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren* [1]. Het thema *Bewijzen*, waarde lezer! Voorzover ik het begrijp, zal een van de te vormen werkgroepen zich bezig houden met *bewijzen in de ruimte*. Deze groep zal het hebben over een vraag die bij elke uitspraak in de stereometrie - overal trouwens - kan worden gesteld, namelijk: *Moet je dat nu bewijzen of niet?* In het programma worden enkele voorbeelden gegeven. Een ervan is Figuur 1 waar ABC een gelijkzijdige driehoek is en P , Q en R de middens zijn van de zijden. De bijbehorende uitspraak is: 'Figuur 1 is het bouwplaatje van een tetraëder'. In het programma heet het: 'veel mensen zullen zeggen: dat zie je zo'. Ik denk het ook, tenminste, voor zover ze weten wat een tetraëder is. Maar een twijfelgeval is het wel en dan spreek ik uit ervaring. Toen ik zo'n zestig jaar geleden examen deed voor de akte Wiskunde MO KI, legde prof.dr. Jan de Vries, een meetkundige van naam, mij Figuur 2 voor; het verschil met Figuur 1 is, dat $\triangle ABC$ niet gelijkzijdig is. 'Ziet U wel', zo sprak hij 'dat is het netwerk van een viervlak (men sprak toen, ook in de wiskunde, meestal Nederlands in deze streken) en over dat viervlak wou ik het met U hebben.' Ik antwoordde: 'Dat zie ik niet, ik moet het eerst bewijzen.' 'Maar dat ziet ieder toch zo, je hoeft dat toch niet te bewijzen!' Dus zei ik maar niets meer en ging braaf alle fraaie (want dat zijn het) eigenschappen van het bedoelde viervlak bewijzen. Na nog een didactisch getinte vraag - ik kom daar nog op terug - mocht ik gaan.



Figuur 1

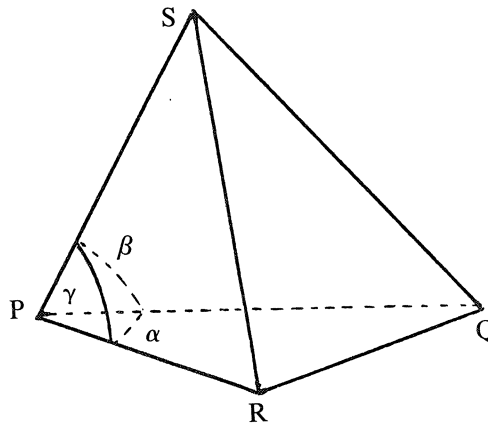


Figuur 2

Voor een mondeling examen was de examenzaal onevenredig groot en het was een lange weg naar de deur. Achter mijn rug hoorde ik de mede-

examinator - het was meen ik prof. Wolff - driftig tegen De Vries fluisteren. Bij de deur riep De Vries me terug. 'Ik was daarnet wat voorbarig' zei hij 'U had gelijk, men moet dat wel degelijk heel precies bewijzen want het is, zoals U blijkbaar wel wist, niet altijd juist.' Toen mocht ik nog even zeggen wanneer de uitspraak niet juist is. Ik zal dat, met de reden ervoor, straks uiteenzetten. Eerst nog iets over de didactisch gekleurde vraag. Bezitters van de akte KI waren alleen bevoegd om schoolonderwijs in de wiskunde te geven, als ze ook de akte Q (pedagogische bekwaamheid) bezaten. Die akte werd gewoonlijk, in de vorm van een aantekening op de KI-akte, vrijwel cadeau gedaan. Maar sommige examinatoren, als regel degenen die zelf uitmuntende didactische gaven bezaten, wilden een kandidaat nog wel eens voor een rondje didactiek uitnodigen. In dit geval ging dat als volgt. 'Geef U eens een definitie, meneer, van een prismoïde en zegt U ook even hoe de inhoudsformule is.' Toen ik dit had gespuid, kwam de eigenlijke vraag. 'Nu moet U eens aan ons uitleggen, zonder een figuur te tekenen, hoe die formule kan worden afgeleid.' Zo ging dat 60 jaar geleden. Een lachertje?

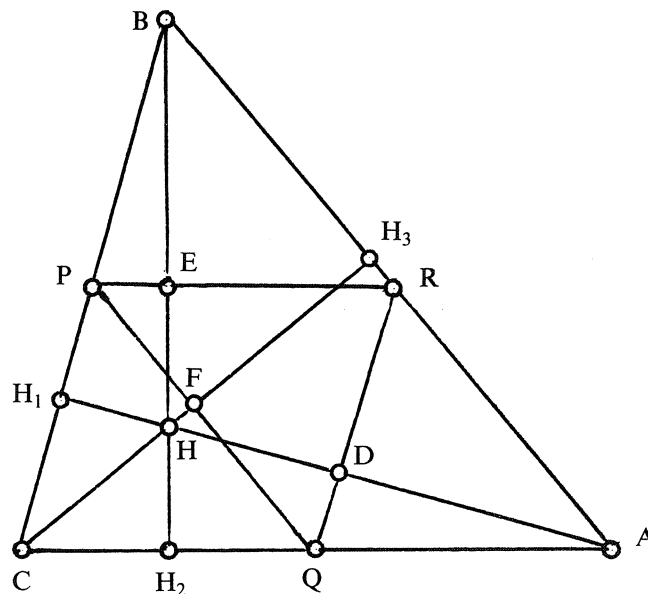
Nu terug naar Figuur 2 en naar de vraag: wanneer is dit *niet* het netwerk van een viervlak? Veronderstel eens even dat het *wel* het netwerk van een viervlak $PQRS$ is. Zijn α , β en γ de hoeken van $\triangle ABC$ dan zie ik die hoeken ook bij P , Q en R zowel in de vlakke figuur als ook bij het viervlak (Figuur 3). De drievlakshoek bij P heeft dus α , β en γ als zijden. Maar in een drievlakshoek is elke zijde kleiner dan de som van de beide andere. Dus bv. $\alpha < \beta + \gamma$, waaruit volgt: $2\alpha < \alpha + \beta + \gamma = \pi$ en $\alpha < 1/2\pi$. Voor β en γ geldt hetzelfde. Conclusie: als Figuur 2 het netwerk is van een viervlak, is $\triangle ABC$ scherphoekig. Mooier: *opdat Figuur 2 het netwerk is van een viervlak, is noodzakelijk dat $\triangle ABC$ scherphoekig is.*



Figuur 3

Is deze voorwaarde nu ook *voldoende*? Als $\triangle AQR$ wentelt om QR , is de baan van A een cirkel c , in het vlak door de hoogtelijn AH loodrecht op vlak PQR (Figuur 4). B en C beschrijven bij wenteling van $\triangle BRP$ om RP en

ΔCPQ om PQ overeenkomstige cirkels c_2 en c_3 . De vlakken van deze cirkels hebben gemeen de lijn h door H loodrecht op vlak PQR . Als ΔAQR zover gewenteld is dat A zich op h bevindt, zeg in S_1 , is $\overline{HS_1}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{HD}^2 = (\overline{AD} + \overline{HD})(\overline{AD} - \overline{HD}) = \overline{AH}(\overline{AD} - \overline{HD}) = \overline{AH} \times \overline{HH_1}$. Opdat A inderdaad op h kan komen, is nodig dat $\overline{AD} > \overline{HD}$ en hieraan is alleen voldaan als H binnen ΔABC ligt, dus in een scherphoekige driehoek. Komen B en C bij hun wenteling in de punten S_2 en S_3 van h terecht, dan is $\overline{HS_2}^2 = \overline{BH} \times \overline{HH_2}$ en $\overline{HS_3}^2 = \overline{CH} \times \overline{HH_3}$. Gelijkvormigheid van geschikt gekozen rechthoekige driehoeken in Figuur 4 leert $\overline{AH} \times \overline{HH_1} = \overline{BH} \times \overline{HH_2} = \overline{CH} \times \overline{HH_3}$. Vouwt men zo, dat S_1, S_2 en S_3 aan dezelfde kant van vlak PQR liggen, dan vallen ze samen tot één punt S en is een viervlak $PQRS$ ontstaan.

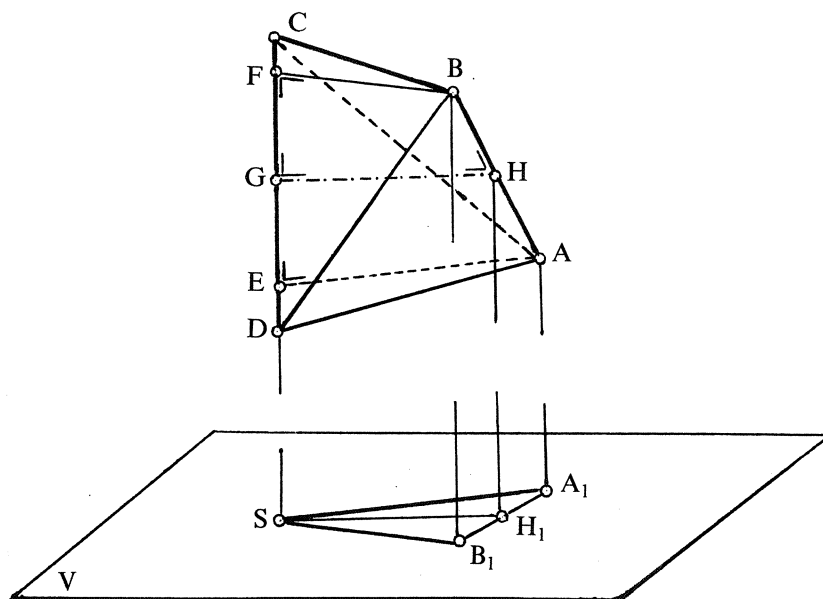


Figuur 4

Het is niet ongevoel dat in een lessituatie de groep met: 'Dat zie je toch zo' op de uitspraak bij Figuur 1 reageert. Wijzend op de symmetrie van Figuur 1 kan de docent dit rustig beamen door op te merken dat A, B en C bij het vouwen toch haast wel terecht moeten komen in een punt S loodrecht boven het middelpunt H van ΔPQR . Dan is het maar een klein stapje meer naar de cirkels die A, B en C hierbij doorlopen en de rechthoekige driehoekjes die in bovenstaand betoog S_1HD, S_2HE, S_3HF heten en die bij Figuur 1 congruent zijn. De ingrediënten voor een echt bewijs liggen dan op tafel. Het is daarna haast vanzelfsprekend dat de docent de groep uitdaagt om eens na te gaan wat er van dit bewijs overeind blijft bij Figuur 2. Van een groep uit een lerarenopleiding zou men dan toch moeten verwachten dat er iets uitkomt dat lijkt op het betoog dat hierboven voor dit geval is gegeven. En dat men hiermee onherroepelijk vastloopt als de uitgangsdriehoek niet scherphoekig is, lijkt mij dan

een ontdekking die onvermijdelijk wordt gedaan.

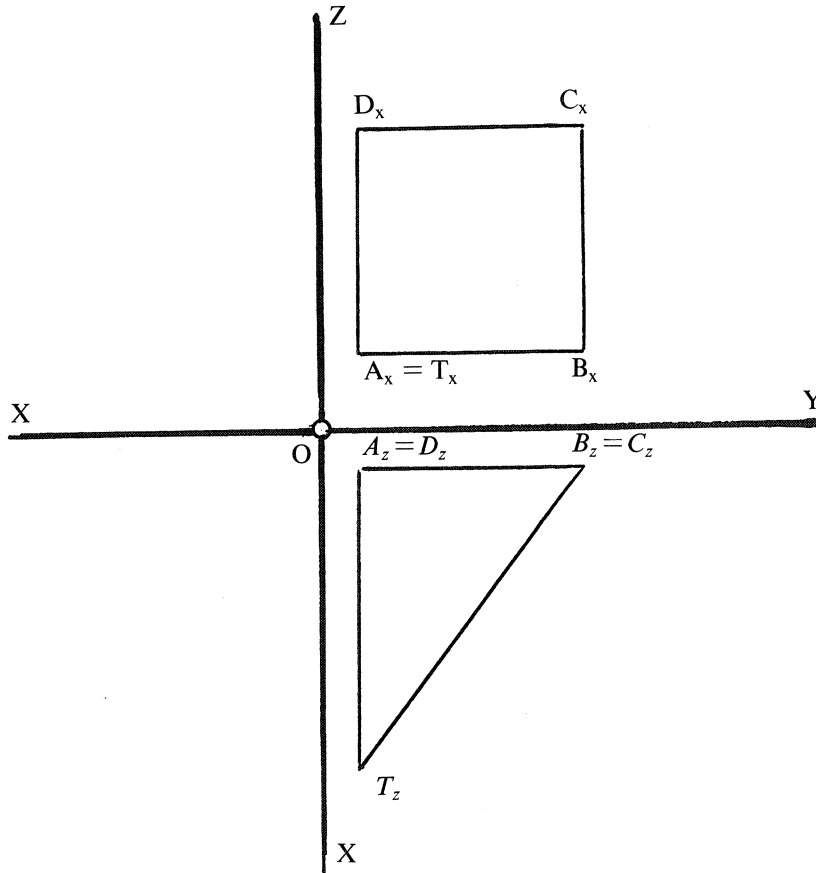
Geen slechte keus dus om Figuur 1 als discussiestuk voor te leggen aan een werkgroep die zich bezighoudt met *bewijs in de ruimte*. Dit geldt temeer omdat de pret nog lang niet op behoeft te zijn, wanneer de netwerken van de Figuren 1 en 2 eenmaal tot viervlakken $PQRS$ zijn gevouwen. In het eerste geval ontstaat een *regelmatig viervlak*; het heeft als zijvlakken vier congruente gelijkzijdige driehoeken. Uit Figuur 2 ontstaat een viervlak waarvan de zijvlakken ook congruente driehoeken zijn, maar gelijkzijdig zijn ze niet. Niettemin wordt het viervlak wel *gelijkzijdig* genoemd. Een gelijkzijdig viervlak wordt namelijk van oudsher gedefinieerd als een viervlak met vier *gelijke* zijden. *Gelijk* betekent in deze context *gelijk van oppervlakte*; deze betekenis heeft dit woord ook nog in de combinatie *gelijk en gelijkvormig*. De vraag die nu direct opkomt, is: *bestaat het netwerk van een gelijkzijdig viervlak altijd uit een driehoek met de parallel omgeschreven driehoek?* Het antwoord is niet moeilijk te vinden. Veronderstel dat in viervlak $ABCD$ geldt $\theta_A = \theta_B$ waar θ_A voorstelt de oppervlakte van het zijvlak tegenover A met analoge betekenissen voor θ_B , θ_C en θ_D . Het voetpunt van de loodlijn uit $A(B)$ neergelaten op CD noemen we $E(F)$. Uit $\theta_A = \theta_B$ volgt dan $\overline{AE} = \overline{BF}$ (Figuur 5). Alle lijnen die loodrecht op CD staan, zijn evenwijdig met elk vlak loodrecht op CD . Veronderstel dat V zo'n vlak is en projecteer het viervlak loodrecht op dit vlak. De projecties van C , D , E en F vallen dan samen met het snijpunt S van CD met V en de projecties A_1 en B_1 van A en B liggen zo, dat $\overline{SA_1} = \overline{SB_1}$. Kortom: *de projectie van $ABCD$ op V is een gelijkbenige driehoek*. Nu is er bij alle lijnen die CD loodrecht snijden precies één die ook AB loodrecht snijdt. Stel dat dit GH is met $G \in CD$ en $H \in AB$. De projectie van G valt in S en de projectie H_1 van H ligt op A_1B_1 . Waar precies? Antwoord: GH maakt met AB een rechte hoek waarvan één been (GH) evenwijdig is met het projectievlak. Zoals bekend, is de loodrechte projectie van zo'n rechte hoek weer een rechte hoek. Dus H_1 ligt zo op A_1B_1 dat $\overline{SH_1} \perp \overline{A_1B_1}$. Conclusie: H_1 is het midden van $\overline{A_1B_1}$. Maar dan is H dus het midden van \overline{AB} . Samengevat: *Uit $\theta_A = \theta_B$ volgt dat de loodrechte snijlijn van AB en CD door het midden van \overline{AB} gaat*. En evenzo: Uit $\theta_C = \theta_D$ volgt: *de loodrechte snijlijn van AB en CD gaat door het midden van \overline{CD}* . In een viervlak $ABCD$ met $\theta_A = \theta_B \wedge \theta_C = \theta_D$ valt de loodrechte snijlijn van AB en CD samen met hun bimediaan. Zo'n viervlak heet *half-gelijkzijdig*. Als men het 180° om GH wentelt, krijgt men: $A \rightarrow B$, $B \rightarrow A$, $C \rightarrow D$, $D \rightarrow C$. Dus $\overline{BC} = \overline{AD}$ en $\overline{AC} = \overline{BD}$. Het heeft dus 2 paren gelijke overstaande ribben. Is bovendien nog $\theta_A = \theta_C$ dan is het viervlak gelijkzijdig en in het bezit van 3 paren gelijke overstaande ribben. Het netwerk is een driehoek met parallel omgeschreven driehoek.



Figuur 5

Dat waren dus bewijzen in de ruimte. Of er enigszins op deze manier naar aanleiding van Figuur 1 is gediscussieerd? Het is twijfelachtig, want het bovenstaande zal wel als verouderd worden beschouwd. Hoe het dan wel moet, weet ik niet. Vlak na de eindexamenperiode 1987 kwam mijn oudste kleindochter met het onderstaande: Opa, hoe moet dit?

4. Van de piramide $TABCD$ zijn hieronder de projecties op het Oxy -vlak en het Oyz -vlak getekend. Voor elk punt P is P_x de projectie op het Oyz -vlak, P_y de projectie op het Oxz -vlak en P_z de projectie op het Oxy -vlak (Figuur 6).
 - a. V is het vlak door A dat loodrecht staat op de ribbe TB . Neem onderstaande figuur over en teken daarin de loodrechte projecties op de drie coördinaatvlakken van de doorsnede van V en de piramide.
 - b. Bereken in graden nauwkeurig de hoek van de vlakken TBC en TCD .
 - c. Bewijs dat de punten A , B , C , D en T op één bol liggen. Bereken de straal van deze bol.



Figuur 6

‘Maar zover ben jij toch nog lang niet, jongedame. Je gaat straks pas naar de vijfde.’

‘Het is voor een vriendje; die heeft eindexamen wiskunde B gedaan. Dit is een fotocopie van een van de examenopgaven. Ze zeiden allemaal dat het moeilijk was.’

Daar stond opa dan. Dat ruimtemeetkunde op het eindexamen B zou worden gevraagd, had hij al bij geruchte vernomen. Dat Euclides in de ban was gedaan was hem al jaren bekend. Maar ging men nu de geest van Monge oproepen? En dat nog wel op deze volmaakt idiote manier? Dat zijn immers niet twee projecties van een piramide $TABCD$: er ontbreekt een ribbe, namelijk TC . Monge is overigens slecht nagevolgd: hij zou stellig het coördinatenstelsel aan de situatie hebben aangepast door de oorsprong in A en de assen langs AT , AB en AD te leggen. Een opgave met hindernissen dus. En waarom niet vermeld dat V de lijn TB in G en TC in H snijdt? Dat vergemakkelijkt dacht ik de correctie en zou bovendien het voordeel hebben gehad dat men misschien had gemerkt dat TC ook meedoet. De moeilijkheidsgraad van

de opgave verandert niets door dit alles. Bij onderdeel *a* heb ik de derde projectie geconstrueerd. Hoe de beide andere onderdelen moesten worden opgelost, wist ik niet en ik heb daarom alleen de antwoorden gegeven. Hiermee was het vriendje tevreden, maar hij had ze zelf niet gevonden. Pas drie maanden later ben ik er achter gekomen hoe ik het had moeten doen. Het blijkt dat bij de zogenaamde regionale besprekingen van de examenopgaven de leraren ook niet bepaald verrukt waren over dit vraagstuk [2]. Welk soort oplossing verwacht werd, meen ik te kunnen opmaken uit de mededeling dat men in één groep oordeelde dat opgave 4 'te veel vectormeetkunde bevat'. Het was dus waarschijnlijk de bedoeling uit de figuur de kengetallen van de vectoren **TA**, **TB**, enz. af te lezen en daarmee verder te werken. Wanneer men van plan is, voortaan de ruimtemeetkunde zo te beoefenen, kan men ze beter geheel schrappen. Maar dat zal wel niet gebeuren. Want in de aankondiging van de studiedag heet het: 'Bewijzen is niet meer wat het geweest is. Het leven met de ruimtemeetkunde van nu lijkt wat onbestemd. Het vraagt opportunisme van leraar en leerling. Maar zolang er centrale examens bestaan, zal er behoefte zijn aan een zekere communis opinio over de interpretatie van opdrachten als: bewijs, toon aan, laat zien, beredeneer ...' De 'ruimtemeetkunde van nu' moet worden onderwezen aan de jeugd van nu door leraren van nu, tenminste als men dit vak in het onderwijsprogramma opneemt. En dat onderwijs moet nog steeds goed worden gedaan en niet door het vak voor te stellen als een slepende kwaal, waarmee men moet leren leven. Het lijkt me bepaaldelijk frustrerend ruimtemeetkunde te moeten bedrijven met leerlingen die nauwelijks weten wat er bij een opdracht als *bewijs* of *laat zien* van hen verlangd wordt. Bewijzen moet m.i. al in een vroeg stadium van het wiskunde-onderwijs worden geleerd. Op onze middelbare scholen gebeurde dat vroeger ook; in de eerste klas. Een ervaren directeur of rector zette voor die klas een geroutineerd leraar, nogal vaak een die als bezitter van de akte MO KV bevoegd was om wiskunde-onderwijs aan een middelbare school te geven. De jonge doctorandus met zijn veel uitgebreider kennis verwees hij naar de vierde en vijfde klas. Zo waren de dertienjarigen in handen van iemand die uit het lager onderwijs voortkwam en die wist hoe je met zulke kinderen moest werken. En na een jaar had hij ze zover dat de meesten een eenvoudig bewijsje in elkaar konden zetten. En de doctorandus had in dat jaar geleerd dat hij zich grondiger op zijn lessen moest voorbereiden. Want de vijfdeklassers hadden direct door wanneer zijn bewijs van een examenopgave niet helemaal in orde was. Maar dit alles stamt uit een tijd waarin men nog oordeelde dat de lucht schoon was en seks in mindere mate en uitleggen nog niet als de slechtste vorm van onderwijs werd beschouwd. Tegenwoordig weet men wel beter en moet men zijn onderwijs inpassen in het knellend gareel van toetsperioden en proefwerkweken. Centralisatie en egalisatie staan hoog genoteerd, prestatie en competitie zijn weinig in tel. Voor de meetkunde kan geen uitzondering worden gemaakt en de afgelopen tien jaar geven dit dan ook maar al te duidelijk te zien. Jammer.

Tien jaar later

27

LITERATUUR

1. Euclides **63**, 25-27 (1987/88).
2. Euclides **63**, 17 (1987/88).

Symmetrie en Regelmaat

H.A. Lauwerier

Voordracht van de vakantiecursus uit 1978

*How nice it would be if we could only get through
into Looking-glass House. I'm sure it's got
such beautiful things in it!
Lewis Carroll. Through the looking-glass.*

In deze voordracht zal ik proberen U aan de hand van een aantal voorbeelden duidelijk te maken hoe een wiskundige als vertegenwoordiger van de meest zuivere wetenschap door natuur en mensenhand geschapen kunstwerken beziet en hoe hij deze met behulp van wiskundige begrippen kan analyseren. Wat we onder wiskunde verstaan zal in dit gezelschap geen nadere toelichting behoeven. Met 'meetkunde' wordt het wat moeilijker, maar ook daarover zal hier geen misverstand bestaan. Over wat kunst is en wat een kunstwerk is, kunnen de meningen ernstig verschillen. Ik zal dan ook niet proberen er een soort definitie van te geven - een voor een wiskundige weinig aantrekkelijk uitgangspunt - maar me beperken tot een aantal voorbeelden en het aan U over te laten naar gelieven andere voorbeelden te kiezen.

De werelden van wiskunde en van kunst lijken wel disjunct. In de wiskunde zijn alle begrippen streng gedefinieerd en berusten de redeneringen op strakke logische principes. In de kunst is alles even vaag en zijn de overwegingen eerder van intuïtieve en associatieve aard. Maar zowel de wiskundige als de kunstenaar weten zich gesteund door vakmanschap en daar aan de basis ontmoeten beide werelden elkaar.

Leonardo da Vinci (1452-1519) die zijn 'Trattato della pittura' begint met de woorden 'laat niemand die geen wiskundige is, mijn werken lezen', verklaart ronduit dat 'schilderkunst een wetenschap is die als alle wetenschappen op de wiskunde gebaseerd moet zijn'. Alberti (1400-1472), de beroemde humanist, voorganger van da Vinci, schreef in 1435 het eerste leerboek over de perspectiefleer. Hierin verklaart hij dat het een eerste vereiste voor schilders is meetkunde te kennen. Piero della Francesca (1406-1492), een van de grootste schilders van de 15de eeuw, geldt tevens als een vooraanstaand wiskundige. Zijn fresco's tonen fraaie en gedurfde toepassingen van de perspectiefleer. Zijn 'Opstanding van Christus' welke zich in een klein museum in Sansepolero bevindt, is een toepassing van een perspectief met twee hoofdverdwijnpunten, hetgeen aan het geheel een aparte bekoring geeft. De laatste twintig jaar van zijn leven schreef hij een aantal verhandelingen, waarin hij aantoonde dat de

visuele wereld tot een wiskundige ordening kan worden teruggebracht door toepassing van perspectiefleer en meetkunde.

Een schilder ziet zich geconfronteerd met het probleem een ruimtelijke werkelijkheid op een zodanige wijze op een plat vlak af te beelden dat bij de toeschouwer een illusie van ruimtelijke samenhang gewekt wordt. Dat een op meetkundige grondslagen berustende perspectiefleer hierbij onontbeerlijk is, lijkt ons westerlingen van de twintigste eeuw vanzelfsprekend. Toch is dit alleen maar een familietrekje van de westerse beschaving. De wereld van het Oosten en met name de Chinese schilderkunst heeft het daarentegen altijd zonder duidelijk meetkundige principes weten te stellen en is desondanks of misschien juist daarom tot grotere hoogte gestegen dan de westerse schilderkunst.

Maar wij zijn de erfdragers van de klassieke Griekse cultuur waaraan de namen van Plato, Aristoteles, Pythagoras en Archimedes verbonden zijn. Euclides geeft in zijn bekende leerboek een uitvoerige beschouwing over de perspectiefleer en dat de kunstenaars er op geraffineerde wijze gebruik van wisten te maken, blijkt op overtuigende wijze uit overgebleven fresco's in Pompeji en Herculaneum, copieën van Griekse originelen. Weliswaar ging deze kennis, en zoveel meer, tijdelijk verloren, zo'n duizend jaar, maar door de kunstenaars van de Renaissance werd de draad weer opgenomen en bouwde men voort op wat door de Grieken was bereikt.

Het zou te ver voeren de relaties tussen kunst en meetkunde alle even gedetailleerd te behandelen. Hoewel de perspectief een geschikt onderwerp zou zijn, willen we hier het accent liever leggen op het symmetriebeginsel en wel door in het bijzonder te letten op de kunstuitingen van decoratieve aard. Al sinds onheuglijke tijden is de mens doende geweest zijn omgeving te verfraaien, zijn gebruiksvoorwerpen en zijn bouwsels te voorzien van versieringen met een mogelijk magische, maar steeds decoratieve werking. Het is blijkbaar zo dat ons oog aangenaam getroffen wordt door een herhaling van hetzelfde motief, door regelmaat, door symmetrie.

In het dagelijks spraakgebruik denkt men bij het woord symmetrie alleen aan spiegelsymmetrie, maar de wiskundige kan er een exacte en tegelijk veel ruimere betekenis aan geven door een symmetrische figuur te karakteriseren als een figuur die invariant is voor een groep van meetkundige transformaties:

Symmetrie is invariantie t.o.v. een meetkundige transformatiegroep.

Een groep is een eenvoudige, algebraïsche structuur die tegenwoordig al vrij vroeg in ons onderwijssysteem geïntroduceerd wordt. Nu kan men op het tegenwoordige wiskunde-onderwijs nog wel de nodige kritiek hebben. Ik vind bijvoorbeeld dat het meetkundige aspect teveel in de verdrukking gekomen is door de onnatuurlijke splitsing van de wiskunde in wiskunde I en wiskunde II. Anderzijds vind ik het wel nuttig en nodig dat iedereen niet alleen kennis maakt, maar zich ook vertrouwd maakt met het begrip groep. Maar laat ik daar meteen aan toevoegen dat dit alleen zin heeft wanneer dit vergezeld gaat van een groot aantal voorbeelden. In deze voordracht hoop ik U duidelijk te

maken hoe de wereld om ons heen, de wereld van kunst, cultuur en natuur, ons talloze voorbeelden verschaft van regelmatige of symmetrische patronen die we met behulp van het begrip groep kunnen analyseren en classificeren. In het onderwijs zou dan ook weer een plaats ingeruimd kunnen worden voor de vijf regelmatige veelvlakken of de Platonische lichamen, zowel om hun wiskundige als hun culturele betekenis.

Een groep is in wezen een verzameling elementen a, b, c, \dots waarin naar hartelust vermenigvuldigd en gedeeld kan worden. Een *groep* kan beschreven worden met de volgende vier axioma's:

- I. Aan elk geordend paar van elementen a en b is een element c toegevoegd, het *produkt* van a en b . We schrijven $c = ab$.
- II. Het produkt is associatief, d.w.z.

$$(ab)c = a(bc).$$

- III. Er is een eenheidselement e zodanig dat voor elk element a geldt

$$ea = ae = a.$$

- IV. Bij elk element a behoort een invers element a^{-1} zodanig dat

$$aa^{-1} = a^{-1}a = e.$$

Uit de elementen a en b kunnen we zowel het produkt ba als het produkt ab afleiden. Deze produkten behoeven niet gelijk te zijn. Wanneer bij een groep altijd $ab = ba$ geldt, is dat iets bijzonders en spreken we van een *commutatieve groep*.

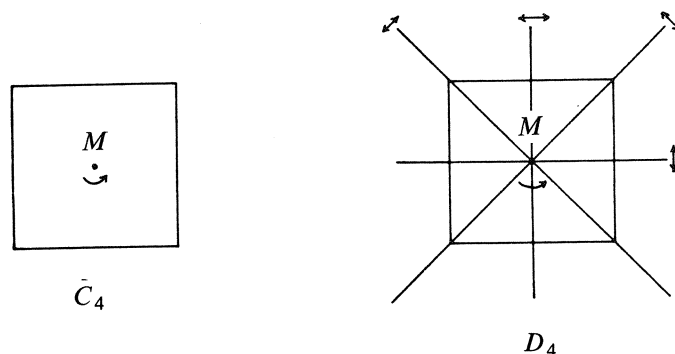
De eenvoudigste meetkundige groepen waarmee we te maken hebben zijn de *cyclische groep* en de *diëdergroep*. Beschouwen we een vierkant (zie fig.1) met middelpunt M , dan zijn er drie rotaties om M die het vierkant met zich zelf tot dekking brengen, nl. die over 90° , 180° en 270° . Met de identiteit (draaiing over 0° of 360°) vormen ze de vier elementen van een groep, de z.g. cyclische groep C_4 . De produktvorming in deze groep is niets anders dan het achter elkaar uitvoeren van twee rotaties. Duiden we de rotatie $1234 \rightarrow 2341$, d.w.z. die over 90° , aan met a dan kunnen we de elementen van deze groep beschrijven als e, a, a^2, a^3 waarbij $a^4 = e$. Het vierkant is ook invariant voor de vier spiegelingen waarvan de assen middellijnen of diagonalen zijn (zie fig. 1). Deze vier spiegelingen vormen met de vier elementen van C_4 een nieuwe groep van acht elementen, de z.g. diëdergroep D_4 . Is a weer de rotatie om M over 90° en is b de spiegeling om de diagonaal 1,3 dan kunnen we het product ba (eerst a dan b) berekenen volgens het schema

$$1234 \rightarrow 2341 \rightarrow 4321.$$

Het resultaat is dus een spiegeling om de horizontale as door M . Berekenen we daarentegen ab (eerst b and a), dan geeft het schema

$$1234 \rightarrow 1432 \rightarrow 2143$$

als resultaat een spiegeling om de verticale as door M . De diëdergroep D_4 is



Figuur 1

dus niet commutatief in tegenstelling tot de cyclische groep C_4 die wel commutatief is. De elementen van D_4 kunnen we beschrijven als $e, a, a^2, a^3, b, ab = ba^3, a^2b = ba^2, a^3b = ba$ waarbij $a^4 = b^2 = e$. Nemen we in plaats van een vierkant een regelmatige n -hoek, dan kunnen we op analoge wijze de cyclische groep C_n en de diëdergroep D_n vormen met resp. n en $2n$ elementen. De kleinste echte diëdergroep D_3 beschrijft de symmetrieën van een gelijkzijdige driehoek en is tevens het voorbeeld van de kleinste niet-commutatieve groep. Hoewel er geen regelmatige tweehoek bestaat, kunnen we formeel nog een stapje terug doen en een diëdergroep vormen met de vier elementen $e, a, b, ab = ba$ waarbij $a^2 = b^2 = e$. Deze groep D_2 staat bekend als de *viëdergroep* (Vierergruppe) van Klein naar Felix Klein, een der grondleggers van de moderne meetkunde. Een aardige realisatie van deze groep wordt gevormd door de rotaties over 180° om de x -as, y -as en z -as van een ruimtelijk Cartesisch coördinatenstelsel.

Zowel de cyclische groep als de diëdergroep zijn hier beschreven als groepen van meetkundige transformaties. De elementen zijn *verplaatsingen* en *omleggingen* van het platte vlak waarbij een vast punt als oorsprong of middelpunt op zijn plaats blijft. Algemener beschouwen we *isometrische transformaties* van het platte vlak. Dit zijn afbeeldingen waarbij de afstand tussen twee punten niet verandert. Deze transformaties vormen natuurlijk ook weer een groep met als produktvorming het achter elkaar uitvoeren van twee bewerkingen. Een punt dat bij een isometrische transformatie op zijn plaats blijft, heet een *dekpunt*, een rechte lijn die als geheel invariant is heet een *deklijn*. De isometrische transformaties vallen uiteen in *verplaatsingen* waarbij de omloopszin behouden blijft en *omleggingen* waarbij de omloopszin verandert.

In de lineaire algebra wordt een lineaire transformatie beschreven door

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Kiezen we een orthonorme basis, d.w.z. een Cartesisch assenstelsel, dan komt de eis van isometrie neer op een orthogonale transformatiematrix:

$$\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2 + \delta^2 = 1, \quad \alpha\gamma + \beta\delta = 0.$$

Uit de identiteit

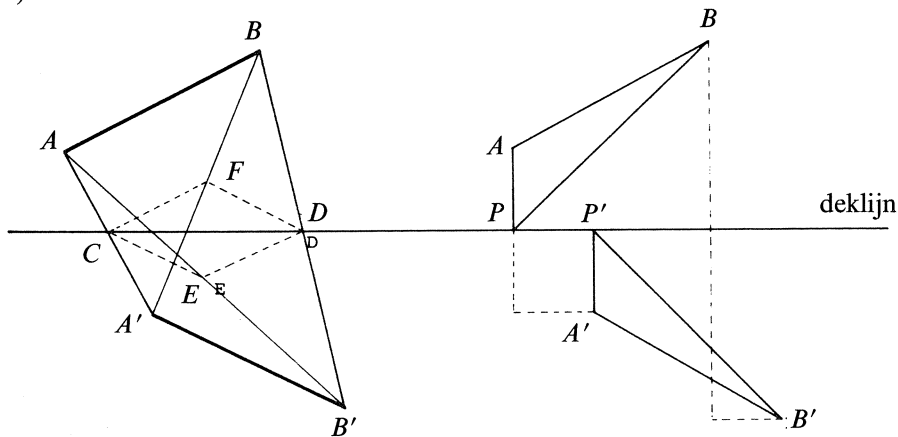
$$(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 = (\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2) - (\alpha\gamma + \beta\delta)^2$$

volgt dan dat de determinantwaarde van de transformatiematrix ± 1 is. De splitsing manifesteert zich hier door $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ voor de verplaatsingen en $\alpha\delta - \beta\gamma = -1$ voor de omleggingen.

De verplaatsingen zijn *rotaties* en *translaties*. Een translatie is gekenmerkt door de afwezigheid van dekpunten, maar wel is er een familie van onderling evenwijdige deklijnen in de translatierichting. Een rotatie of draaiing is gekenmerkt door de aanwezigheid van precies één dekpunt, het centrum van de rotatie. Een belangrijk speciaal geval is de rotatie over 180° of de puntspiegeling waarbij alle rechten door het rotatiecentrum deklijnen zijn. Voor een rotatie om de oorsprong over de hoek ϕ gaat (1) over in

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Tot de omleggingen behoren in elk geval de *lijnspiegelingen*. Een lijnspiegeling is gekenmerkt door een uit dekpunten bestaande lijn, de as van spiegeling. Daarnaast is er een familie van loodrecht op deze as staande deklijnen. Hoe een algemene omlegging er uitziet is misschien minder bekend, maar we kunnen er achter komen met een eenvoudige meetkundige overweging (zie fig. 2).



Figuur 2

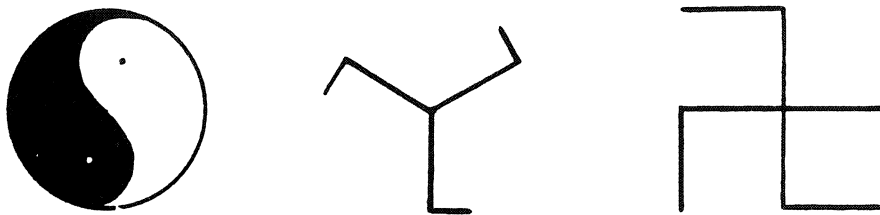
Nemen we aan dat de punten A, B door de omlegging overgaan in A', B' dan is dus $A'B' = AB$. De middens C, D, E, F van $AA', BB', AB', A'B$ blijken een ruit te vormen zodat CD gelijke hoeken maakt met AB en $A'B'$. We zien nu dat CD een deklijn van de omlegging is. Is b.v. P de projectie van A op CD dan ligt het beeldpunt P' als de projectie van A' eveneens op CD . De driehoeken ABP en $A'B'P'$ ontstaan uit elkaar door een spiegeling om de deklijn en een translatie in de richting van de deklijn. De algemene omlegging is daarmee een z.g. *schuifspiegeling* of *glijspiegeling*. De behandeling van de omlegging met behulp van lineaire algebra is helaas niet zo doorzichtig. Voor (1) kunnen we schrijven

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ \sin \phi & -\cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}. \quad (3)$$

De deklijn heeft hierbij de richting $\frac{1}{2}\phi$.

We weten nu voorlopig genoeg van de groepentheorie om er met plezier gebruik van te kunnen maken. Symmetrische voorstellingen waren in de klassieke Oudheid bij de kunstenaars bijzonder geliefd. De vroegste voorbeelden treft men aan bij de bewoners van het Tweestromenland in het vijfde millennium voor Christus die hun aardewerk op prachtige wijze met symmetrische voorstellingen wisten te versieren. Een schaal gevonden bij Samarra is aldus gedecoreerd met een patroon van vogels en vissen met de symmetrie van de cyclische groep C_4 . Dezelfde symmetrie in meer abstracte vorm zien we bij de swastika (zie fig. 3), een oeroud symbool dat overal in de wereld aangetroffen wordt, zowel bij het Boeddhisme als bij sommige negervolken in Afrika. Het C_3 -analogon komt daarentegen veel minder voor. De Grieken gebruikten dit magische symbool (zie fig. 3), het triquetrum, voor Sicilië; het driehoekige eiland Trinakria, in de vorm van drie benen met een Medusahoofd in het midden. Vakantiegangers komen het o.a. in Bretagne tegen als de z.g. triskel, welke teruggaat op een oude Keltische voorstelling die de kringloop van de elementen aarde, water en vuur beschrijft.

De eenvoudigste cyclische groep C_2 wordt uitgebeeld door het bekende Yin en Yang symbool, waarin de Chinezen tot uitdrukking brachten dat de kosmos uit een mannelijk en een vrouwelijk element samengesteld was.

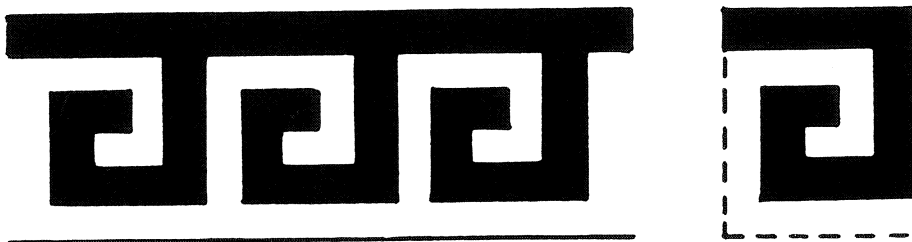


Figuur 3

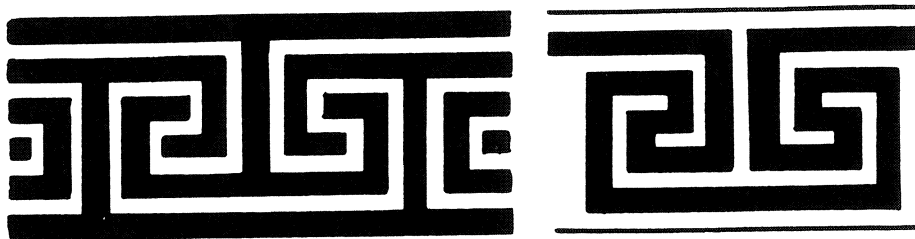
De kunstenaars van het oude Mesopotamië hadden een opvallende voorkeur voor voorstellingen met een spiegelsymmetrie, voorstellingen die tot in onze tijd stand hebben gehouden. We noemen b.v. het Sumerische symbool voor de 'boom des levens', een gestyleerde boom met twee vogels, een motief dat we in onze huiskamers op Perzische tapijten terug kunnen vinden.

De Grieken plachten in de vroegste periode hun aardewerk te versieren op een wijze die als de 'geometrische stijl' wordt aangeduid. Later beeldden ze hoofdzakelijk naturalistische voorstellingen uit ontleend aan het dagelijks leven en aan de verhalenschat van o.a. de Ilias en de Odyssee. Maar in de randversiering leefden de geometers zich uit. Beroemd is de Griekse meanderrand, waarvan we in figuur 4 een paar fragmenten geven.

Een wiskundige stelt zich allicht tot taak in de veelheid van randversieringen orde te brengen door uit te gaan van de groepentheoretische eigenschappen. Een randversiering ziet hij als een door twee evenwijdige lijnen begrensd ornament, het *motief*, dat door oneindigvoudige herhaling van een zekere elementaire translatie T telkens over een zekere afstand a verplaatst is. De door T^n , $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ bepaalde translaties vormen een groep, de z.g. *translatiegroep*. De randversiering is invariant t.o.v. de elementen van de translatiegroep en bezit daarmee translatiesymmetrie. Het motief kan zelf ook symmetrieën bezitten. Door de combinatie van de translatiesymmetrie met de in het motief aanwezige symmetrie ontstaan ingewikkelder symmetrievormen.

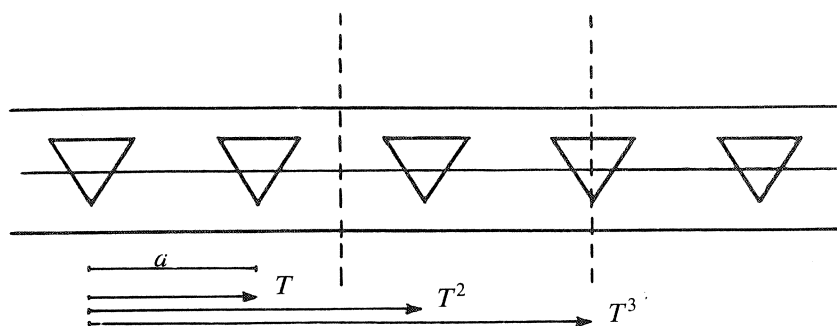


Figuur 4a



Figuur 4b

In figuur 5 hebben we een dergelijk geval geschetst. Het motief bezit een spiegelsymmetrie S om een verticale as. De symmetriegroep van deze randversiering kan worden opgebouwd uit de elementen S en T . Is S de spiegeling om de vaste verticale as van een willekeurig als uitgangspunt gekozen motief, dan zijn TST^{-1} en $T^{-1}ST$ overeenkomstige spiegelingen om de assen van de naburige motieven. Maar ook ST en TS zijn spiegelingen en wel om assen die halverwege tussen twee motieven doorlopen. Deze symmetriegroep is niet commutatief en we zien gemakkelijk in dat TST hetzelfde element is als S zodat $ST = T^{-1}S$.

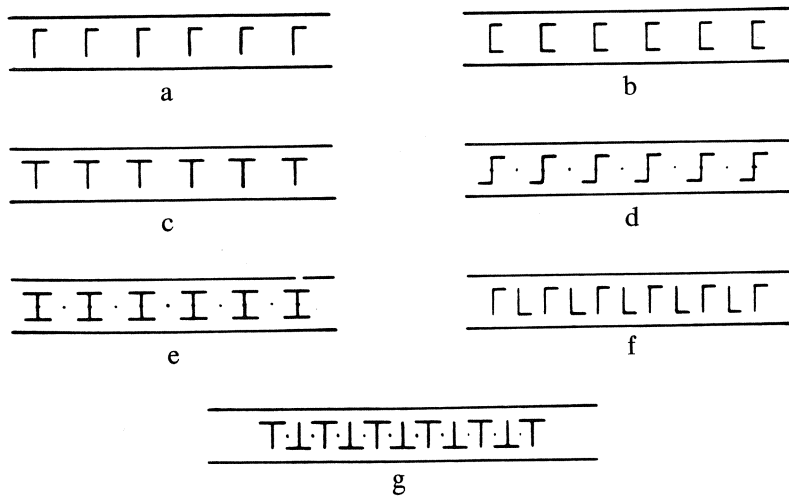


Figuur 5

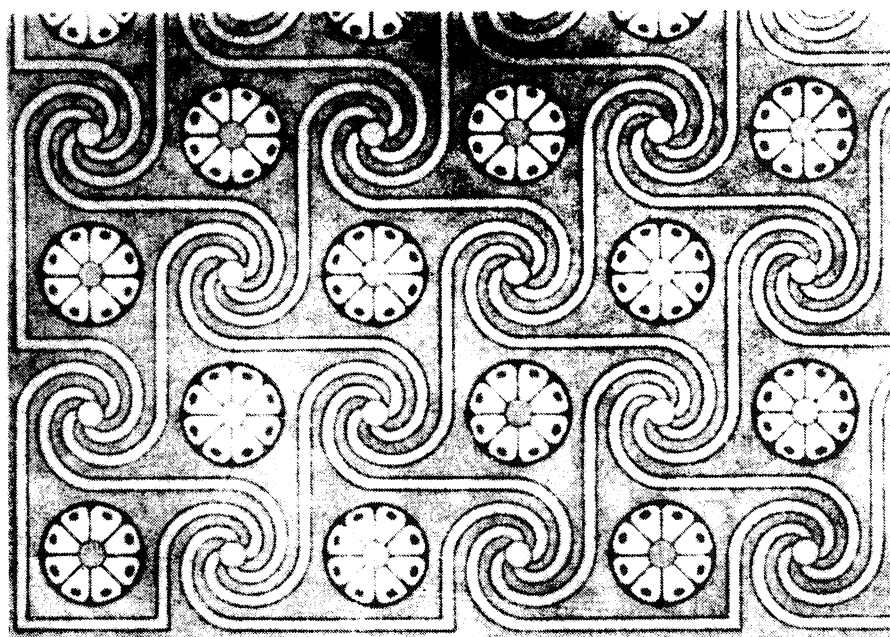
De grote verscheidenheid van randversieringen kan op grond van hun groepentheoretische eigenschappen teruggebracht worden tot zeven hoofdtypen welke schematisch samengevat zijn in figuur 6. De elementaire afstand is hierbij voor alle typen gelijk genomen. Type d en g zijn blijkbaar die van de in figuur 4 geschetste Griekse meanders.

Het aantal symmetrietypen bij randversieringen is hiermede nog niet uitgeput. Men kan o.a. ook gebruik maken van contrasterende kleuren en van dieptewerking. Bij het laatste bestaat de mogelijkheid dat twee lijnen elkaar op twee wijzen kunnen kruisen. Alleen al door deze toevoeging stijgt het aantal hoofdtypen tot 31.

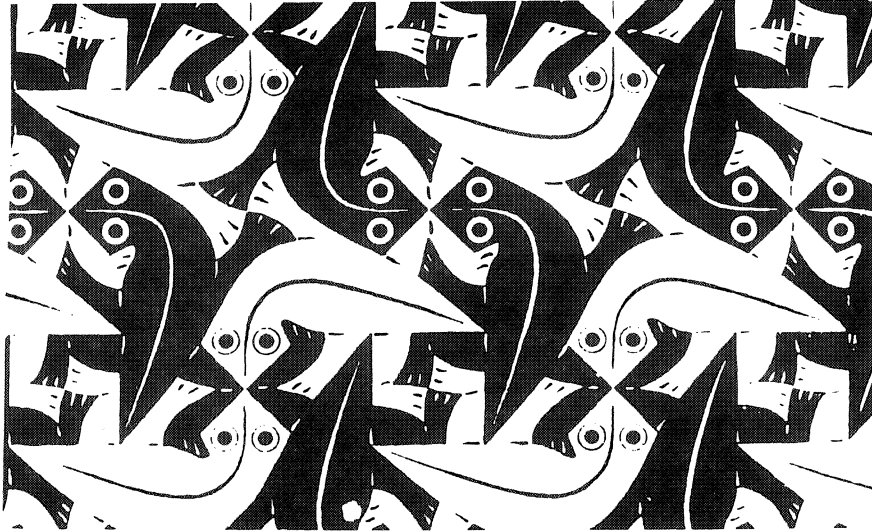
De volgende stap is de studie van regelmatige vlakversieringen. Zij spelen in de decoratieve en grafische kunst een grote rol en ik laat U er twee zien die zo'n vierduizend jaar uit elkaar liggen. Figuur 7 toont een fragment van een Egyptisch grafgewelf en figuur 8 geeft U een door de nog maar kort geleden overleden graficus M.C. Escher ontworpen regelmatig patroon.



Figuur 6



Figuur 7



Figuur 8

De wiskundige analyse van deze en soortgelijke vlakke patronen is eigenlijk erg eenvoudig. We beginnen met een *puntrooster*, een verzameling punten die uit een punt O ontstaat door translaties van de vorm

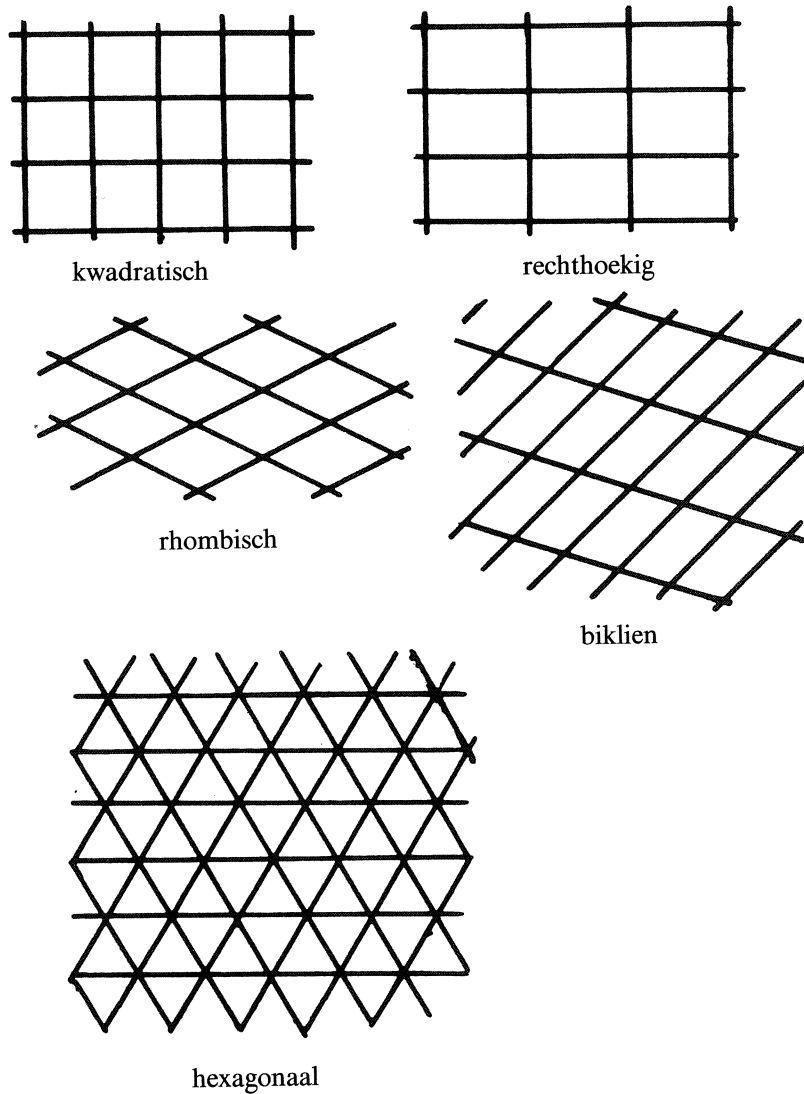
$$\mathbf{v} = n_1 \mathbf{v}_1 + n_2 \mathbf{v}_2,$$

waarbij n_1 en n_2 gehele getallen zijn. De translaties kunnen we samenvatten in een *translatiegroep* waarvan de elementen op overeenkomstige wijze als $T_1^{n_1} T_2^{n_2}$ aangeduid worden. Een puntrooster kan behalve de translatiesymmetrie ook nog rotatiesymmetrie en spiegelsymmetrie bezitten. Alle isometrische transformaties die een gegeven rooster met zich zelf tot dekking brengen, vormen de z.g. *roostergroep*. Het is opmerkelijk dat een rooster alleen compatibel is met rotaties van de orde 2, 3, 4 en 6. We kunnen dit als volgt inzien. We nemen aan dat het rooster een n -voudige rotatiesymmetrie heeft. Is v de kleinste vector die twee naburige roosterpunten P en Q verbindt en ontstaat PR uit PQ door een draaiing over de hoek $\phi = 2\pi/n$ dan is ook R een roosterpunt. Maar omdat $QR \geq PQ$ is $2v \sin \frac{1}{2}\phi \geq v$ zodat

$$\sin \frac{\pi}{n} \geq \frac{1}{2}.$$

Dit beperkt de orde n van de rotatiesymmetrie al tot de waarden 2, 3, 4, 5, 6. De waarde $n=5$ zal blijken te vervallen. Heeft ϕ de waarde $2\pi/5$ en roteren we de vector PQ om P over de hoeken $\pm\phi$ dan vinden we twee roosterpunten R en S . De som van de vectoren PR en PS is de vector PT zodat $PSTR$ een parallellogram is. Een kleine berekening laat zien dat het nieuwe roosterpunt T dichter bij P ligt dan Q (in strijd met ons uitgangspunt).

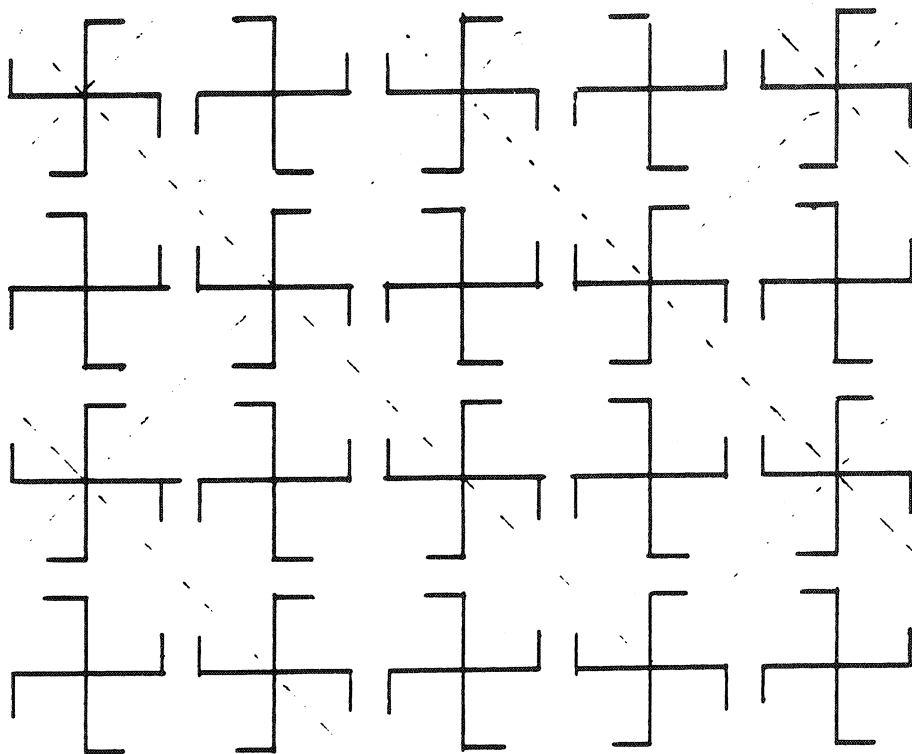
De vlakke roosters kunnen we classificeren door op hun symmetrie-eigenschappen te letten. Er blijken precies vijf typen te bestaan (zie fig. 9) welke als bij de ruimtelijke kristalstructuren aangeduid worden met de adjectieven biklien, kwadratisch hexagonaal, rhombisch en rechthoekig. De rhombische en rechthoekige roosters zijn nauw verwant. Het rhombische patroon kan uit het rechthoekige afgeleid worden door aan elke rechthoek het middelpunt toe te voegen, en omgekeerd.



Figuur 9

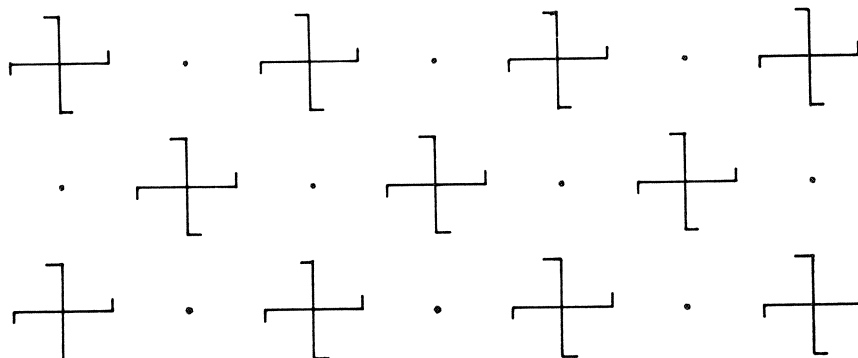
De symmetrieën van de roosters zijn bepaald door de structuur van de bijbehorende groepen. Nemen we als voorbeeld het rechthoekige rooster dan kan de roostergroep opgebouwd worden uit de volgende vier elementen. Is P een willekeurig roosterpunt dan nemen we eerst de translaties T_1, T_2 die P in horizontale of verticale richting een stap verplaatsen. Vervolgens nemen we de puntspiegeling C_2 om P en een lijnspiegeling S om b.v. de horizontale as door P . Het produkt C_2S is dan een lijnspiegeling om de verticale as door P .

Brengen we in elk roosterpunt een ornament aan, dan treden de symmetrieën van het ornament en die van het rooster met elkaar in wisselwerking. De symmetrie of liever de asymmetrie van het motief onderdrukt symmetrieën van de roostergroep en leidt tot een ondergroep ervan. Gaat men alle mogelijkheden na dan komt men tot 17 verschillende typen. Afbeeldingen en uitvoerige beschrijving vindt men in het aanbevelenswaardige boek van A. Speiser bij het onderwerp 'Die Flächenornamente'. In figuur 10 hebben we een kwadratisch rooster voorzien van tegen elkaar indraaiende swastika's. Het is een aardige opgave alle typen isometrische transformaties op te sporen die deze vlakversiering invariant laten. We volstaan met de vermelding dat er stelsels horizontale en verticale assen zijn met de symmetrie van afwisselend spiegeling of schuifspiegeling. Er zijn ook assen van schuifspiegeling die onder hoeken van 45° lopen.



Figuur 10

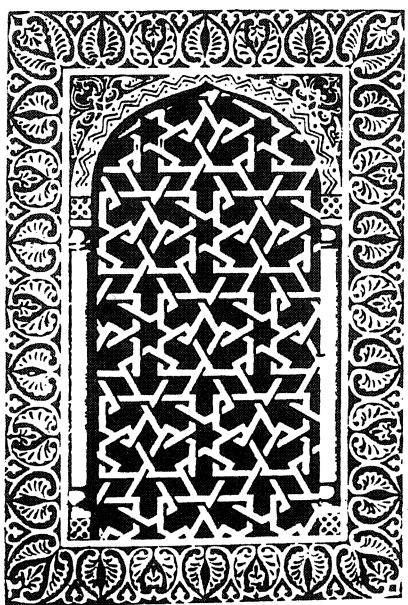
De in figuur 8 afgebeelde prent van Escher kunnen we nu ook gemakkelijk analyseren. De basis is weer het kwadratische rooster. Het is nu voldoende de centra van een viertallige resp. tweetallige rotatiesymmetrie te markeren. Lijn- of schuifspiegelingen zijn afwezig. Het corresponderende abstracte patroon is dan dat van figuur 11.



Figuur 11

Het kan zijn dat Escher uitgegaan is van het schema van figuur 11. Het verrassende is evenwel dat hij er in geslaagd is het gehele vlak te vullen met één enkel naturalistisch motief. De regelmatige vlakvullingen worden in de decoratieve kunst veelvuldig toegepast. Grote meesters op dit gebied waren de Egyptenaren die vooral in hun grotschilderingen een ware virtuositeit ten toon spreidden. Min of meer met verbazing kunnen we constateren dat van alle 17 hoofdtypen voorbeelden te vinden zijn. Hoewel de wiskundige prestaties van de Egyptenaren naar onze begrippen vrij pover waren, zeker in vergelijking tot die van de Mesopotamiërs, moeten de Egyptische kunstenaars een grote praktische kennis van de meetkunde bezeten hebben. Prachtige illustraties van het kunnen van de antieke kunstenaars kan men aantreffen in het in 1868 verschenen boek 'The grammar of ornaments' van Owen Jones. Wie dit boek ter hand neemt, zal ervaren dat de overgrote meerderheid van de in onze dagelijkse omgeving voorkomende regelmatige patronen, vloerbedekking, parketvloeren, tegelvloeren, wandbekleding, in dit boek te vinden is. Zo uitputtend waren de Egyptenaren in hun decoratieve kunst dat de Grieken en Romeinen er niets van betekenis aan toe konden voegen. Eerst de Arabieren, de erfgenamen van de Griekse cultuur, voegden aan de decoratieve kunst nieuwe elementen toe.

Door hun geloofsovertuiging welke hen afhield van het uitbeelden van levende wezens, zonder dat hierbij overigens sprake van een verbod was, werden zij er toe gebracht in hun ornamentiek bij voorkeur gebruik te maken van geometrische motieven. In figuur 12 geven we een bijzonder fraai specimen afkomstig uit een in de veertiende eeuw in Cairo gebouwde moskee. Bij een oppervlakkige beschouwing zien wij misschien een aantal rechthoeken waarvan de zijden onderling hoeken van 60° maken. Toch is het patroon niet opgebouwd op een rechthoekig maar op een hexagonaal rooster uit een aaneenschakeling van trifolia of klaverblaadjes. Men lette daarbij op centra van zestallige, drietallige en tweetallige rotatiesymmetrie.



Figuur 12

Gaan we een dimensie verder met de bestudering van regelmatige ruimtelijke structuren, dan gaan we ons in feite bezighouden met kristallografie, de leer van de kristallen als regelmatige bouwsels van moleculen en atomen. Hier, nog meer dan in het platte vlak, is de groepentheorie het middel par excellence om orde te scheppen in de veelheid van kristalvormen zoals we ze in de natuur tegenkomen. We beginnen weer met de classificatie van de puntroosters. Daarvan zijn er veertien die tot zeven hoofdtypen behoren. Een rooster zonder axiale symmetrieën heet *triklien*. Is er een tweetallige rotatie-as dan heet het *monoklien*. Er zijn daarvan twee typen mogelijk. Een rooster met een viertallige rotatie-as heet *tetragonaal*; ook hier bestaan er twee typen. Er is één type rooster met een zestallige rotatiesymmetrie, het *hexagonale* rooster. Er is ook een rooster met een drietallige maar geen zestallige symmetrie, het z.g. *rhomboëdrische* rooster. Er zijn vier typen met drie onderling loodrechte

tweetallige assen die allen *rhombisch* heten. Tenslotte is er het *kubische* rooster met drie typen.

We hebben al gezien dat een vijfthallige rotatiesymmetrie niet kan voorkomen. De natuur kent geen kristallen met een vijfthallige symmetrie! De ruimterosters moeten nu nog aangekleed worden met een regelmatige verdeling van ornamenten. Ook hier geeft de wisselwerking van de symmetrieën van het motief en die van het rooster aanleiding tot een grote verscheidenheid van vormen. Men kan aantonen dat er op grond van hun groepentheoretische eigenschappen precies 32 verschillende motieven bestaan corresponderend met even zo vele kristalklassen. Zo'n symmetriegroep bestaat uit een aantal ruimtelijke draaiingen en vlakspiegelingen waarbij een vast punt invariant is. Van bijzonder belang zijn de z.g. *tetraëdergroep* en de *oktaëdergroep* welke de symmetrieën van het regelmatig viervlak, zesvlak of kubus en achthoekvlak beschrijven.

De elementen van de tetraëdergroep zijn de ruimtelijke draaiingen welke een regelmatig viervlak met zich zelf tot dekking brengen. Het zijn de identiteit, acht draaiingen om drietallige assen en drie draaiingen om tweetallige assen, in totaal dus 12 elementen.

Hoewel de kubus en het regelmatig achthoekvlak er verschillend uitzien, zijn de symmetrie-eigenschappen dezelfde en beide lichamen worden dan ook beschreven door dezelfde symmetriegroep, de uit 24 elementen bestaande oktaëdergroep. Voor de kubus zijn dit de identiteit, negen draaiingen om viertallige assen, acht draaiingen om drietallige assen en zes draaiingen om tweetallige assen. Dit zijn de enige regelmatige lichamen die in de levenloze natuur van de kristallen gerealiseerd worden. Voor de overige twee regelmatige lichamen, het twaalfvlak en het twintigvlak is dan geen plaats in verband met het verbod van vijfthallige rotatie-assen. In de wiskunde, in de kunst en in de levende natuur zijn er minder problemen.

Omstreeks 1900 verbaasde de Duitse natuuronderzoeker Ernst Haeckel de wetenschappelijke en artistieke wereld met zijn kunstzinnige afbeeldingen van vooral de microscopische levensvormen van zee en oceaan waarin de natuur de fraaiste symmetrievormen tot leven had gebracht. Zonder moeite vinden we bij b.v. de radiolarii, eencellige planktondiertjes, op de vijf regelmatige lichamen gebaseerde skeletjes. Een nog kort geleden beschreven exemplaar, de *Braarudosphaera Bigelowi*, vertoont zelfs de vorm van een volmaakt regelmatig twaalfvlak en wel met een diameter van 23 μm .

De ontdekking van het bestaan van precies vijf regelmatige lichamen was voor de Griekse wetenschap een prestatie van de eerste rang. Vóór Plato's tijd (427-347 v.C.) waren het regelmatige viervlak, zesvlak (kubus), achthoekvlak en twintigvlak goed bekend en werden ze opgevat als de symbolen voor de vier elementen aarde, vuur, lucht en water. Later ontdekte Theaitetos, een tijdgenoot van Plato, het regelmatige twaalfvlak. Men vermoedt dat de vorm van op Sicilië gevonden pyrietkristallen, een verbinding van zwavel en ijzer, hem tot deze ontdekking geleid hebben. In zijn grote natuurfilosofische dialoog 'Timaeus' handhaafde Plato de oude symboliek en verhief het regelmatig twaalfvlak als vijfde bestanddeel, de quinta essentia of kwintessens van de

middeleeuwse alchemisten, tot symbool van het alles omvattend universum.

Het blijkt dat regelmatig twaalfvlak en twintigvlak dezelfde symmetrie-eigenschappen hebben en dat deze beschreven worden door de z.g. *ikosaëdergroep*, een uit 60 elementen bestaande groep. Een nadere beschrijving van de elementen en van de eigenschappen van deze groep laten we maar achterwege. Dodekaëders werden in de Oudheid wel gebruikt als dobbelstenen. Tegenwoordig herkennen we de dodekaëder in een voetbal.

De Grieken meenden dat de wereld op wiskundige d.w.z. op meetkundige wijze, geordend was. Ptolemaeus wist de beweging van zon, maan en de planeten terug te voeren tot een samenstel van cirkelbewegingen. Johannes Kepler ging uit van het in 1543 door Copernicus geformuleerde beginsel om de zon in het middelpunt te plaatsen. In zijn 'Mysterium Cosmographicum', gepubliceerd in 1596, poogde hij de afstanden in het zonnestelsel in verband te brengen met de vijf regelmatige veelvlakken. De banen van Saturnus, Jupiter, Mars, Aarde, Venus en Mercurius - meer planeten kende men toen niet - liggen op bollen die van elkaar gescheiden zijn door de regelmatige lichamen waaraan ze beurtelings ingeschreven en omgeschreven zijn. Van buiten naar binnen gaand ontmoeten we aldus kubus, tetraëder, dodekaëder, oktaëder en ikosaëder. Kepler was wel trots op zijn vondst en wist het te staven met tal van astrologische argumenten. Nu menen we het beter te weten. Nog steeds menen we in de kosmos een wiskundige ordening te kunnen of te moeten vinden. Nobelprijswinnaars weten in de veelheid van elementaire deeltjes orde en regelmaat te brengen met behulp van de groepentheorie. Onaantastbaar is het gezag van Einstein die in zijn algemene relativiteitstheorie de aantrekkingskracht van de materie uit meetkundige principes, kromming van ruimte, afleidt. Kortom, in iets lossere toon maar wel duidelijk: De wereld zit mooi meetkundig in elkaar!

BIBLIOGRAFIE

- ALBRECHT, J.A., KOELLA, R., *Hans Hinterreiter, ein Schweizer Vertreter der konstruktiven Kunst*, Ed. Istvan Schlegl, Wasser Verlag, Buchs-Zurich, 1982.
- BENTLEY, W.A. and HUMPHREYS, W.J., *Snow Crystals*, Dover, 1962
- BOURGOIN, J., *Arabic geometrical pattern and design*, Dover, 1973.
- COXETER, H.M.S., *Unvergängliche Geometrie*, Birkhäuser, 1962.
- COXETER H.M.S., *Regular polytopes*, Dover, 1973.
- COXETER, H.M.S., et al., Eds., *M.C. Escher: Art and Science*, Proceedings of the international Congress on M.C. Escher, Rome, Italy, 26-28 March, 1985. North-Holland, 1986.
- DYE, DANIEL, *Sheets, Chinese lattice designs*, Dover, 1974.
- ERNST, BRUNO, *De toverspiegel van M.C. Escher*, Meulenhoff, Amsterdam, 1976.
- GARDNER, MARTIN, *Spiegelsymmetrie, links en rechts in de natuur*, Aramith, 1986.
- GOMBRICH, E.H., *Kunst en Illusie*, W. de Haan, 1964.
- GOMBRICH, E.H., *The sense of order, A study in the psychology of decorative art*.

- The Wrightsman Lectures*, Phaidon, 1979, second ed. 1984.
- GRÜNBAUM, BRANKO and SHEPHARD, G.C., *Tilings and Patterns*, W.H. Freeman and Cy, 1987.
- HAECKEL, E., *Art forms in nature*, Dover, 1974.
- HARGITAI, ISTVAN. Ed., *Symmetry. Unifying human understanding*, Pergamon Press, 1986.
- HOLDEN, ALAN, *Shapes, space and symmetry*, Columbia University Press, 1971.
- JONES, OWEN, *The grammar of ornaments*, Van Nostrand Reinhold, 1982.
- KLARNER, DAVID A. Ed., *The mathematical Gardner*, Wadsworth Intern. 1981.
- KLINE, M., *Mathematics in western culture*, Oxford Univ. Press, 1953.
- LEHNER, ERNST, *Symbols, signs and signets, a pictorial treasury*, Dover, 1950.
- LAUWERIER, HANS A., *Symmetrie en regelmaat*, Aramith, 1988.
- MACGILLAVRY, CAROLINE H., *Symmetry aspects of M.C. Escher's periodic drawings*, A. Oosthoek's Uitgeversmaatschappij, 1965.
- MIYAZAKI KOJI, *An adventure in multidimensional space. The art and geometry of polygons, polyhedra, and polytopes*, Wiley-Interscience, 1986.
- SCHATTSCHEIDER, DORIS, *In black and white: how to create perfectly colored symmetric patterns*, Comp. & Maths. with Appls. Vol. 12B, nos 3/4, 1986.
- SCHATTSCHEIDER, DORIS, *The plane symmetry groups: Their recognition and notation*, Am. Math. Monthly, june-july 1978.
- SCHATTSCHEIDER, DORIS & WALKER, WALLACE, *M.C. Escher Kaleidocycles*. Ballantine books, 1977.
- SHUBNIKOV, A.V. and KOPTSIK, V.A., *Symmetry in science and art*, Plenum Press, 1974.
- SPEISER, ANDREAS, *Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung*, Birkhäuser Verlag, Vierte, erw. u. bericht. Aufl., 1955.
- STEINHAUS, H., *Mathematical snapshots*, Oxford University Press, 1950.
- WEYL, HERMANN, *Symmetry*, Princeton University Press, 1952, third pr. 1962.

Het tijdschrift Pythagoras bevat een groot aantal bijdragen op het thema van meetkunde, kunst en symmetrie. We vermelden b.v.

jrg. 14 no. 2 en no. 5.

jrg. 15 no. 1, 3 en 4.

jrg. 16 no. 4.

jrg. 17 no. 1.

Ook de rubriek van Martin Gardner in Scientific American bevat soms interessante bijdragen op het genoemde thema. Men zie b.v. het juni nummer van 1978.

Constructies met Passer en Liniaal

A.B. Paalman-de Miranda
Voordracht van de vakantiecursus uit 1974

Onder een constructie met passer en liniaal verstaan wij het samenstellen van een meetkundige figuur in het vlak, uitgaande van een eindig aantal gegeven meetkundige objecten (punten, lijnsegmenten, hoeken, cirkels etc.), waarbij als hulpmiddel slechts gebruik gemaakt mag worden van een liniaal, een passer en natuurlijk van het papier dat wij als tekenvlak gebruiken.

Toegestane operaties bij een constructie zijn de volgende:

1. Het trekken van een lijn door twee gegeven of reeds geconstrueerde punten.
2. Het beschrijven van een cirkel met als middelpunt een gegeven of reeds geconstrueerd punt en als straal de afstand tussen twee gegeven of reeds geconstrueerde punten.
3. Het bepalen van nieuwe punten als snijpunten van twee lijnen, twee cirkels of van een lijn en een cirkel als in 1 en 2 beschreven.

Wij willen nu nagaan welke figuren door middel van passer en liniaalconstructies verkregen kunnen worden en welke niet. Het blijkt dat deze constructieproblemen eerder van algebraïsche dan van meetkundige aard zijn. Als eenmaal de goede aanpak van deze vraagstukken gevonden is, dan is de oplossing in de meeste gevallen niet al te diep liggend.

In dit hoofdstuk zullen wij o.a. de onoplosbaarheid van een aantal beroemde klassieke meetkundige problemen bewijzen. Het betreft hier de volgende problemen:

1. De trisectie van de hoek. Gegeven een hoek; verdeel deze in drie gelijke delen.
2. De verdubbeling van de kubus. Gegeven de ribbe van een kubus; construeer de ribbe van een kubus met dubbele inhoud.
3. De kwadratuur van de cirkel. Gegeven een cirkel, construeer een vierkant met dezelfde oppervlakte.
4. De constructie van een regelmatige n -hoek.

Alvorens deze problemen nu afzonderlijk te bespreken, zullen wij ons eerst bezighouden met het algemene probleem.

Aangezien iedere lijn, cirkel of hoek bepaald is door een eindig aantal punten, kan het constructieprobleem als volgt geformuleerd worden: Laat P een eindige verzameling punten in het vlak zijn (minstens twee); karakteriseer nu alle punten die in een eindig aantal stappen uit P geconstrueerd kunnen

worden met passer en liniaal; de construeerbare punten.

Om deze punten te beschrijven kiezen wij een Cartesisch coördinatenstelsel in ons vlak. Daar P minstens twee punten bevat, kunnen wij dit zo kiezen dat één van de punten $p_0 \in P$ de oorsprong wordt en dat de afstand van p_0 tot $p_1 \in P$ onze lengte-eenheid is. Trek n.l. de lijn ℓ door p_0 en p_1 en construeer de loodlijn op ℓ in p_0 .

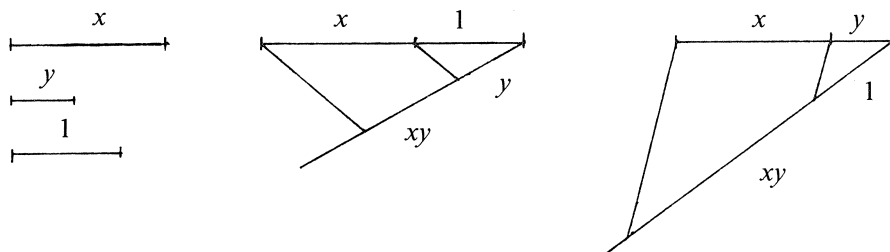
Met behulp van dit coördinatenstelsel kunnen wij nu alle punten in het vlak representeren door paren reële getallen. Zij nu $\{1, a_1, \dots, a_n\}$ de verzameling van coördinaten van punten uit P .

Een reëel getal α zullen wij nu construeerbaar noemen m.b.v. $\{1, a_1, \dots, a_n\}$ als α coördinaat is van een construeerbaar punt.

Het is duidelijk dat de verzameling van geconstrueerde punten m.b.v. P volkomen bepaald is door de verzameling van construeerbare reële getallen m.b.v. $\{1, a_1, \dots, a_n\}$ en omgekeerd.

LEMMA 1. *Zij W de verzameling van alle construeerbare reële getallen m.b.v. $\{1, a_1, \dots, a_n\}$, dan is W een deellichaam van \mathbb{R} en er geldt dus $\mathbb{Q}(a_1, \dots, a_n) \subset W \subset \mathbb{R}$.*

BEWIJS. Zoals bekend is, kan men als de lengte-eenheid x en y gegeven zijn altijd construeren $x+y$, $x-y$, $x \cdot y$ and x/y , $y \neq 0$ (zie fig. 1).



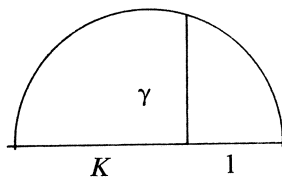
Figuur 1

W is dus een deellichaam van \mathbb{R} .

Aangezien $\{1, a_1, \dots, a_n\} \subset W$ geldt dus $\mathbb{Q}(a_1, \dots, a_n) \subset W \subset \mathbb{R}$.

LEMMA 2. *Zij $k \subset \mathbb{R}$ een lichaam van construeerbare getallen en stel $\beta \in k(\alpha) \subset \mathbb{R}$ met α kwadratisch over k , dan is β construeerbaar.*

BEWIJS. Daar α kwadratisch is over k zijn er getallen $k_1, k_2 \in k$ zó dat $\alpha^2 + k_1\alpha + k_2 = 0$. Stel nu $\gamma = \alpha + \frac{1}{2}k_1$, dan geldt $\gamma^2 - \frac{1}{4}k_1^2 + k_2 = 0 \Rightarrow \gamma^2 = k_3 \in k$. α is dan construeerbaar, aangezien γ dat is (zie fig. 2). Verder is iedere $\beta \in k(\alpha)$ te schrijven als $\beta = k_3 + k_4\alpha$ met $k_3, k_4 \in k$ en dus is β construeerbaar.



Figuur 2

GEVOLG 1. Als β bevat is in een lichaam L dat uit het lichaam $k = \mathbb{Q}(a_1, \dots, a_n)$ verkregen wordt door eindig veel kwadratische uitbreidingen $k \subset k(\alpha_1) \subset k(\alpha_1, \alpha_2) \subset \dots \subset k(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) = L$; $[k(\alpha_1, \dots, \alpha_{i+1}) : k(\alpha_1, \dots, \alpha_i)] = 2$ dan is β construeerbaar uitgaande van $\{1, a_1, \dots, a_n\}$. Tevens is dan $[L : k] = 2^r$. Zoals uit de volgende stelling blijkt, is ook de omkering van deze bewering waar.

STELLING 1. Een reëel getal β laat zich uit $\{1, a_1, \dots, a_n\}$ construeren met behulp van passer en liniaal dan en slechts dan als β bevat is in een lichaam L dat uit $k = \mathbb{Q}(a_1, \dots, a_n)$ verkregen wordt door eindig veel kwadratische uitbreidingen $k \subset k(\alpha_1) \subset k(\alpha_1, \alpha_2) \subset \dots \subset k(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) = L$, $[k(\alpha_1, \dots, \alpha_{i+1}) : k(\alpha_1, \dots, \alpha_i)] = 2$.

BEWIJS. Als β in een dergelijk lichaam L bevat is, dan is β construeerbaar (gevolg 1). Zij nu omgekeerd β construeerbaar. We mogen ons in het vlak al die punten bepaald denken, waarvan de coördinaten in k zitten (lemma 1). In dat vlak bekijken wij nu de elementaire constructies.

1. Het trekken van een lijn door twee punten met coördinaten in k . Een dergelijke lijn heeft een vergelijking van de vorm $ax + by + c = 0$ met $a, b, c \in k$.
2. Het beschrijven van een cirkel met als middelpunt een punt met coördinaten in k en als straal de afstand tussen twee punten met coördinaten in k . Iedere dergelijke cirkel heeft een vergelijking van de vorm $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ met $a, b, c \in k$.
3. Het bepalen van nieuwe punten als snijpunt van lijnen en cirkels zoals in 1 en 2.

Twee lijnen met coëfficiënten uit k snijden elkaar in een punt (p, q) met $p, q \in k$.

De doorsnijding van een lijn en een cirkel met coëfficiënten in k geeft hoogstens twee punten waarvan de coördinaten liggen in k of in een lichaam $k(\alpha_1)$ met α_1 kwadratisch over k .

De doorsnijding van cirkels $x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0$ en $x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2 = 0$ tenslotte is gelijk aan de doorsnede van de cirkel $x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0$ en de lijn $(a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + (c_1 - c_2) = 0$.

Wij krijgen dus wederom punten met coördinaten in k of in $k(\alpha_1)$ met α_1 kwadratisch over k .

Evenzo geven ons lijnen en cirkels met coëfficiënten uit $k(\alpha_1)$ ons punten met coördinaten uit $k(\alpha_1)$ of uit $k(\alpha_1, \alpha_2)$ met α_2 kwadratisch over $k(\alpha_1)$.

Daar β construeerbaar is en dus in eindig veel stappen uit k bereikt kan worden, geldt

$$\beta \in k(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) \text{ met } [k(\alpha_1, \dots, \alpha_{i+1}) : k(\alpha_1, \dots, \alpha_i)] = 2.$$

GEVOLG 2. Als β construeerbaar is uitgaande van $\{1, a_1, \dots, a_n\}$ dan is de graad van $k(\beta)$ over $k = \mathbb{Q}(a_1, \dots, a_n)$ een macht van 2. Immers uit bovenstaande stelling volgt $\beta \in k(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ met $[k(\alpha_1, \dots, \alpha_r) : k] = 2^r$ en aangezien $k \subset k(\beta) \subset k(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ geldt $[k(\alpha_1, \dots, \alpha_r) : k(\beta)] [k(\beta) : k] = 2^r \Rightarrow [k(\beta) : k]$ is een macht van 2.

OPMERKING 1. Het is niet zo moeilijk in te zien dat uit bovenstaande stelling volgt: Een reëel getal β is construeerbaar uitgaande van $\{1, a_1, \dots, a_n\}$ dan en slechts dan als β ligt in een normale uitbreiding L van $k = \mathbb{Q}(a_1, \dots, a_n)$ met $[L : k] = 2^m$.

Immers zij L een normale uitbreiding van k en $[L : k] = 2^m$, dan is de Galois-groep G van L over k een groep met 2^m elementen en er bestaat dan een rij normaaldelers $N_m = \{e\} \subset N_{m-1} \subset N_{m-2} \subset \dots \subset N_0 = G$ zó dat $N_i / N_{i+1} \simeq \mathbb{Z}_{(2)}$.

Uit de hoofdstelling van de Galois-theorie volgt dan dat hiermee correspondeert een rij tussenlichamen $k = k_0 \subset k_1 \subset \dots \subset k_m = L$ zó dat de Galois-groep van k_{i+1} over k_i isomorf is met $\mathbb{Z}_{(2)}$ i.e. k_{i+1} kwadratisch over k_i .

Is omgekeerd gegeven een rij lichamen $k = k_0 \subset k_1 \subset \dots \subset k_r = L^*$ met k_{i+1} kwadratisch over k_i , dan is k_{i+1} het splijtlichaam over k_i van een kwadratisch polynoom en dus normaal over k_i . L^* hoeft echter nog niet normaal te zijn over k .

Met inductie naar r bewijst men gemakkelijk dat men door nog ééns eindig veel kwadratische uitbreidingen uit te voeren, kan komen tot een lichaam L dat L^* omvat en normaal is over k . Wij vinden dan een rij $k = k_0 \subset k_1 \subset \dots \subset k_r = L^* \subset k_{r+1} \subset \dots \subset k_m = L$ en $[L : k] = 2^m$.

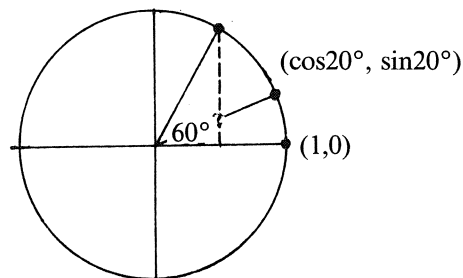
Met behulp van gevolg 2 kunnen wij nu bewijzen dat het onmogelijk is de gevraagde constructies uit te voeren voor de 4 klassieke problemen.

1. DE TRISECTIE VAN DE HOEK

Wij zullen laten zien dat het onmogelijk is een hoek van 60° in drieën te delen. Beschrijf n.l. een eenheidsirkel met als middelpunt het hoekpunt en kies het coördinatenstelsel zó dat de x -as een zijde van de hoek is en de oorsprong het hoekpunt. Trisectie van de hoek is dan equivalent met de constructie van het punt $(\cos 20^\circ, \sin 20^\circ)$ op de eenheidsirkel. In het bijzonder is dan $\beta = \cos 20^\circ$ te construeren.

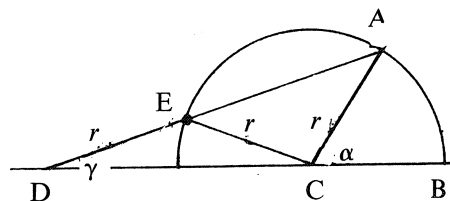
Er geldt echter:

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha \Rightarrow \frac{1}{2} = 4\beta^3 - 3\beta \Rightarrow 8\beta^3 - 6\beta - 1 = 0.$$



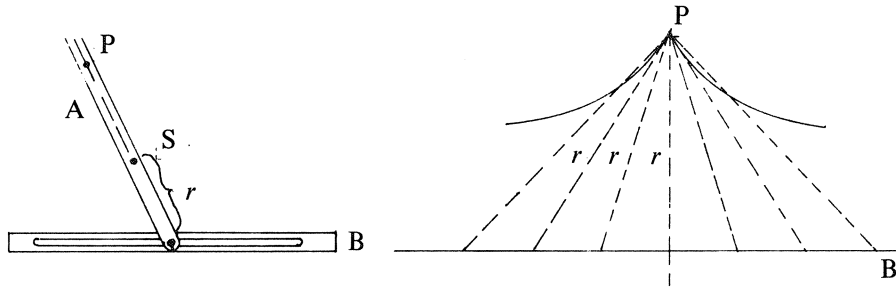
Figuur 3

Nu is de vergelijking $8x^3 - 6x - 1$ irreducibel over $\mathbb{Q} \Rightarrow [\mathbb{Q}(\beta):\mathbb{Q}] = 3$ in tegenspraak met gevolg 2. (Ga na dat wij in dit geval mogen nemen $k = \mathbb{Q}$.) De trisectie van de hoek is dus niet met passer en liniaal uit te voeren. Wel gelukte het ongeveer 250 jaar voor Chr. aan de Griekse wiskundige Nicomedes met behulp van een 'conchoïde-passer' een hoek in drie gelijke delen te verdeelen. Dit berust op de volgende aan Archimedes toegeschreven methode. Beschrijf een cirkel met willekeurige straal r om het hoekpunt C van hoek α en bepaal de lijn door A zó dat de afstand DE gelijk is aan r . Dan is $\gamma = \angle ADC = \alpha/3$ (Figuur 4).



Figuur 4

Een dergelijke lijn kan men vinden met de z.g. conchoïde-passer. Deze bestaat uit een liniaal A die met z'n ene uiteinde in een groef die in een andere liniaal B is aangebracht heen en weer kan glijden. In liniaal A bevindt zich een gleuf waardoor een pen, die in een punt P in het tekenbord wordt gestoken, heen en weer kan schuiven. Brengt men nu op de liniaal A op een afstand r van het hoekpunt verwijderd een schrijfstift aan en laat men de liniaal A door de groef in B schuiven, dan beschrijft de schrijfstift een conchoïde (zie Figuur 5).



Figuur 5

2. DE VERDUBBELING VAN DE KUBUS

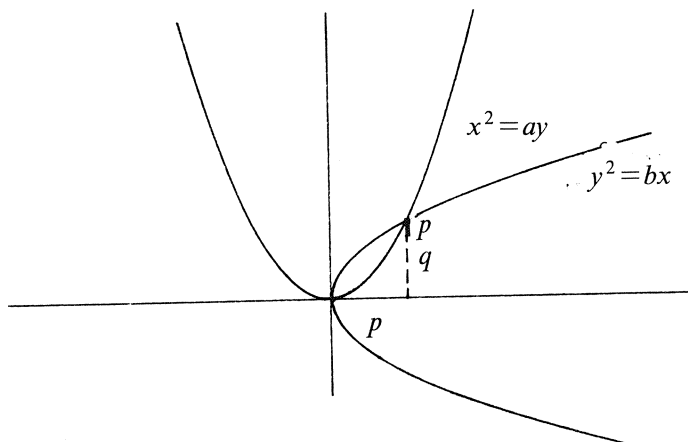
Dit probleem staat ook bekend onder de naam van het *Delische probleem*. De sage vermeldt dat het orakel van Delos aan de Atheners de raad had gegeven het altaar van Apollo in Delos, dat de vorm van een kubus had, door een dubbel zo grote kubus te vervangen. In Athene heerste namelijk de pest, die men aan de boosheid van Apollo toeschreef. Men bouwde toen een altaar waarvan de ribbe $2\times$ zo groot was, met het gevolg dat de inhoud van de kubus 8 maal zo groot werd en de pest voortwoedde. De meetkundigen wendden zich toen tot Plato. Deze zou gezegd hebben dat Apollo niet zo zeer op een dubbel groot altaar gesteld was, dan wel op de invloed die het stellen van een dergelijk probleem op de studie der meetkunde in het algemeen uitoefent.

Kiezen wij de lengte van de ribbe van de gegeven kubus als eenheid, dan wordt dus gevraagd een ribbe te construeren met lengte $\sqrt[3]{2}$. Aangezien $\beta = \sqrt[3]{2}$ een wortel is van het irreducibele polynoom $x^3 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ volgt dat $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}] = 3$ en $\sqrt[3]{2}$ is dus niet construeerbaar.

Reeds in de 5de eeuw voor Christus herleidde Hippocrates van Chios het probleem van de verdubbeling van de kubus tot het volgende:

Gegeven twee lijnsegmenten a en b ; construeer twee lijnsegmenten x en y zó dat $a : x = x : y = y : b$. Immers dan is $x^3 : a^3 = b : a$ en kiest men $b = 2a$ dan $x^3 = 2a^3$ en heeft een kubus met ribbe x een twee keer zo grote inhoud als een kubus met ribbe a . Door snijding van twee parabolen is het nu mogelijk deze constructie uit te voeren. De parabolen $x^2 = ay$ en $y^2 = bx$ snijden elkaar in een punt $P = (p, q)$ met $p^2 = aq$ en $q^2 = bp$ i.e. $a : p = p : q = q : b$.

Daar men reeds in de oudheid eenvoudige parabool-passers bezat, was het gemakkelijk dit snijpunt te vinden.



3. DE KWADRATUUR VAN DE CIRKEL

Gegeven een cirkel met straal 1, gevraagd de zijde van een vierkant met dezelfde oppervlakte te construeren. Dit probleem komt neer op de constructie van het getal β met $\beta^2 = \pi$ en dus op de constructie van een lijnsegment met lengte π .

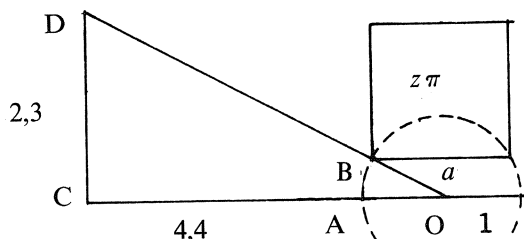
Uit het transcendent zijn van π volgt nu onmiddellijk dat de constructie niet mogelijk is.

Een zeer eenvoudige constructiemethode die een goede benadering van π geeft, is afkomstig van de Oostenrijker Quaika (zie Figuur 6).

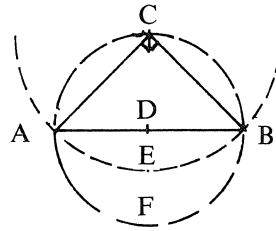
Op de lijn l is met O als middelpunt een cirkel met straal 1 getekend. Zij C het punt op l op een afstand 4,4 van O en D het punt op de loodlijn op l in C met $DC = 2,3$.

Zij B het snijpunt van DO met de cirkel. Trekken wij nu een koorde door B evenwijdig aan l , dan is deze koorde de zijde van een vierkant met oppervlakte ongeveer π . Immers $\cos \alpha = \frac{1}{2}a \Rightarrow a^2 = 4\cos^2 \alpha = 4 \frac{(4,4)^2}{(4,4)^2 + (2,3)^2} = 3,141582\dots$, terwijl $\pi = 3,141592\dots$

Behalve met de kwadratuur van de cirkel hield men zich in de oudheid ook bezig met de kwadratuur van 'maanvormige' figuren (oppervlakken begrensd door 2 cirkelbogen). De reeds eerdergenoemde Hippocrates van Chios is vooral bekend door z'n werk op dit gebied. Zo bewees hij b.v. dat het oppervlak $AEBFA$ gelijk is aan het oppervlak van een vierkant met zijde DB (zie Figuur 7). AEB is een stuk van de cirkel met middelpunt C and AFB een deel van de cirkel met middelpunt D .

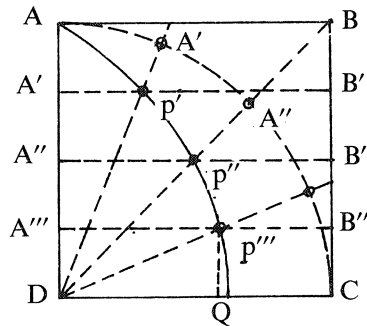


Figuur 6



Figuur 7

Deze resultaten sterkten de Grieken in hun vermoeden dat de kwadratuur van de cirkel mogelijk moest zijn. Met behulp van de quadratrix (of trisectrix) van Hippias is de constructie van π zeer eenvoudig. Deze kromme kan als volgt beschreven worden. In het vierkant $ABCD$ laten wij de lijn DA om D draaien tot deze op de plaats DC terecht komt, terwijl tegelijkertijd de lijn AB naar beneden verschoven wordt tot deze samenvalt met DC . Het snijpunt van beide lijnen beschrijft dan een kromme, de quadratrix.



Uit de figuur volgt onmiddellijk dat de vergelijking van de quadratrix in poolcoördinaten luidt:

$$\frac{\pi}{2\theta} = \frac{a}{b} \Rightarrow b\pi = 2a\theta \Rightarrow \pi r \sin\theta = 2a\theta \quad (\text{lengte } AD = a).$$

De afstand DQ is dus $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{2a\theta}{\pi \sin\theta} = \frac{2a}{\pi}$.

Dinostratus, die bewees dat met de quadratrix de constructie van π mogelijk was, gebruikte natuurlijk alleen overwegingen uit de elementaire meetkunde. (hij bewees dat als p = lengte boog AC , dan $DQ : a = a : p$.)

Dat de quadratrix ook gebruikt kan worden voor de trisectie van de hoek is onmiddellijk duidelijk. Als b.v. hoek QDP' in drieën verdeeld moet worden, dan verdeelt men het lijnstuk $B'C$ in drieën. Zeg B' , B'' , B''' , C . De lijnen $A''B''$ en $A'''B'''$ snijden aan de quadratrix in de punten P'' en P''' zó dat de hoek $P'''DQ$ gelijk is aan $1/3$ hoek $P'DQ$.

4. DE CONSTRUCTIE VAN DE REGELMATIGE n -HOEK

Gegeven een eenheidscirkel, gevraagd de omtrek in n gelijke delen te verdelen. Dit komt neer op de constructie van het getal $\cos(2\pi/n)$. Volgens stelling 1 is dit alleen mogelijk indien $[\mathbb{Q}(\cos(2\pi/n)):\mathbb{Q}]$ een macht is van 2. Maar dan is ook $[\mathbb{Q}(\cos(2\pi/n), \sin(2\pi/n)):\mathbb{Q}] = 2^k$ en dus ook $[\mathbb{Q}(\cos(2\pi/n), \sin(2\pi/n), i):\mathbb{Q}]$ een macht van 2.

Aangezien $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)) \subset \mathbb{Q}(\cos(2\pi/n), \sin(2\pi/n), i)$ geldt dan $[\mathbb{Q}(\zeta_n):\mathbb{Q}]$ een macht van 2 met $\zeta_n = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$ een primitieve n -de machts eenheidswortel.

Is omgekeerd $[\mathbb{Q}(\zeta_n):\mathbb{Q}]$ een macht van 2, dan is daar $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ een normale uitbreiding van \mathbb{Q} (iedere wortel van $x^n - 1$ is een macht van ζ_n en zit dus in $\mathbb{Q}(\zeta_n)$), is ζ_n en dus ook $\cos(2\pi/n)$ bevat in een lichaam dat uit \mathbb{Q} verkregen wordt door eindig veel kwadratische uitbreidingen (zie opmerking 1). $\cos(2\pi/n)$ is dan dus construeerbaar en wij hebben bewezen:

De constructie van een regelmatige n -hoek is dan en slechts dan mogelijk als $[\mathbb{Q}(\zeta_n):\mathbb{Q}] = 2^k$ voor zekere k .

Nu is bekend dat $[\mathbb{Q}(\zeta_n):\mathbb{Q}] = \phi(n)$ is de indicator van Euler.

Als $n = 2^\alpha p_1^{\beta_1} \cdots p_k^{\beta_k}$, p_1, \dots, p_k priemgetallen ≥ 3 dan is

$$\phi(n) = 2^{\alpha-1} p_1^{\beta_1-1} \cdots p_k^{\beta_k-1} (p_1-1)(p_2-1) \cdots (p_k-1).$$

Er moet dus gelden:

$$\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_k = 1 \text{ en } p_1 = 2^{r_1} + 1, p_2 = 2^{r_2} + 1, \text{ etc.}$$

Nu is gemakkelijk in te zien dat $2^r + 1$ priem $\Rightarrow r$ een macht van 2. ($2^a + 1$ is een deler van $2^{ab} + 1$ als b oneven.)

Als n dus behalve factoren 2 alleen priemgetallen van de vorm $2^{2^k} + 1$ enkelvoudig bevat, dan is $\phi(n)$ een macht van 2 en omgekeerd. De enige priemgetallen van de vorm $2^{2^r} + 1$ (priemgetallen van Fermat) die bekend zijn, zijn:

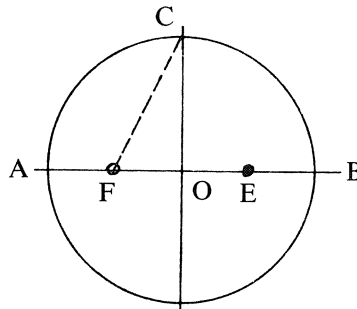
$$3 = 2 + 1, 5 = 2^2 + 1, 17 = 2^4 + 1, 257 = 2^8 + 1, \text{ en } 65537 = 2^{16} + 1.$$

Zo zijn de regelmatige 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15 en 17-hoek construeerbaar, maar de 7, 9, 11 of 13-hoek niet.

OPMERKING 2. Euler bewees dat $2^{32} + 1$ deelbaar is door 641. Immers

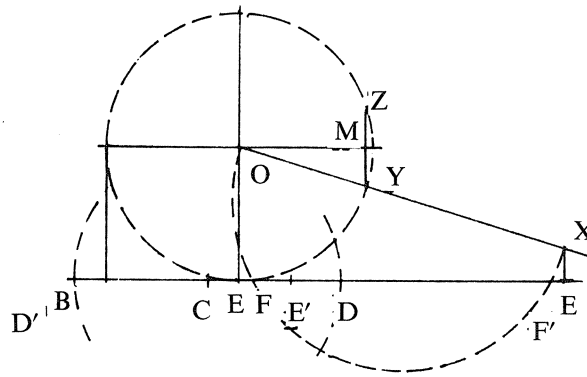
$$\begin{aligned} 641 &= 5^4 + 2^4 \Rightarrow 641 \mid 5^4 \cdot 2^{28} + 2^{32} \\ 641 &= 5 \cdot 2^7 + 1 \Rightarrow 641 \mid (5 \cdot 2^7 + 1)(5 \cdot 2^7 - 1)(5^2 \cdot 2^{14} + 1) = 5^4 \cdot 2^{28} - 1 \Rightarrow \\ &641 \mid 2^{32} + 1. \end{aligned}$$

OPMERKING 3. Als wij een regelmatige a -hoek en een regelmatige b -hoek geconstrueerd hebben en a en b zijn relatief priem, dan is de constructie van de regelmatige ab -hoek niet moeilijk. Er zijn immers gehele getallen n en m met $ma + nb = 1$. Als dus de hoeken $\alpha = (2\pi/a)$ en $\beta = (2\pi/b)$ bekend zijn, dan is $m\alpha + n\beta = 2\pi(\frac{m}{a} + \frac{n}{b}) = \frac{2\pi}{ab}$.



Constructie regelmatige 5-hoek

Zij E het midden van OB en laat $EF = CE$, dan is CF de koorde van een regelmatige 5-hoek.



Constructie regelmatige 17-hoek

Zij $AC = \frac{1}{4}AB$ en bepaal D en D' zó dat $CD = CD' = CO$. Bepaal nu E en E' zó dat $DE = DO$ en $D'E' = D'O$.

Zij nu de lijn XE loodrecht op AE en laat $XE = AE'$. Beschrijf nu de cirkel door O en X met diameter OX en laat F en F' de snijpunten zijn van deze cirkel met de lijn AE .

Zij nu M zó gekozen dat $OM = \frac{1}{2}AF'$, dan is YZ de zijde van een regelmatige 17-hoek.

(Ga na!) \rightarrow Constructie van Gauss.

Möbius-vlakken

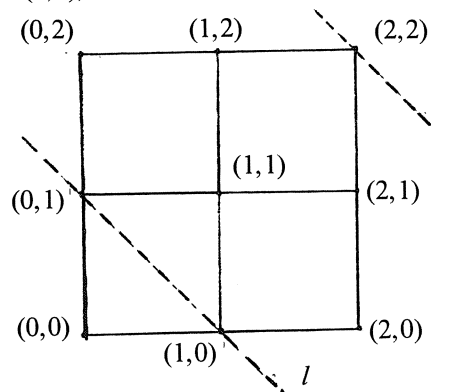
J.H. van Lint

Voordracht van de vakantiecursus uit 1978

1. PROJECTIEVE EN AFFIENE MEETKUNDE

We herinneren aan de definitie van projectieve en affiene ruimtes met coördinaten (zie [2], [3], [4], [6]). Zij K een lichaam. De d -dimensionale affiene ruimte over K is de vectorruimte K^d , d.w.z. de collectie van alle vectoren (x_1, x_2, \dots, x_d) met coördinaten uit K . We geven deze ruimte aan door $A_d(K)$. Zo vinden we b.v. voor $K = \mathbb{R}$ en $d = 3$ de gewone 3-dimensionale ruimte van de stereometrie. Uit de ons bekende meetkunde nemen we termen als vlak, lijn, enz. over. De projectieve ruimte van dimensie d (notatie $P_d(K)$) over het lichaam K wordt gedefinieerd door uit te gaan van $A_{d+1}(K)$. Hierin noemen we de lijnen door de oorsprong O nu (projectieve) punten; vlakken door O worden de lijnen van $P_d(K)$, enz. We nemen de coördinaten over en wel als volgt. Als we zeggen dat het punt x de coördinaten $(x_1, x_2, \dots, x_{d+1})$ heeft, dan bedoelen we met x eigenlijk de lijn door O en het punt $(x_1, x_2, \dots, x_{d+1})$ en dus zijn voor iedere $\lambda \neq 0$ ook $(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_{d+1})$ coördinaten van het projectieve punt x . Voor de punten met laatste coördinaat $\neq 0$ mogen we deze coördinaat gelijk aan 1 nemen. We vinden zo de meetkunde $A_d(K)$ als deel van $P_d(K)$ (door de laatste coördinaat te negeren). Als K het eindige lichaam met q elementen is, dan worden de notaties $AG(d, q)$ resp. $PG(d, q)$ gebruikt i.p.v. $A_d(K)$ en $P_d(K)$.

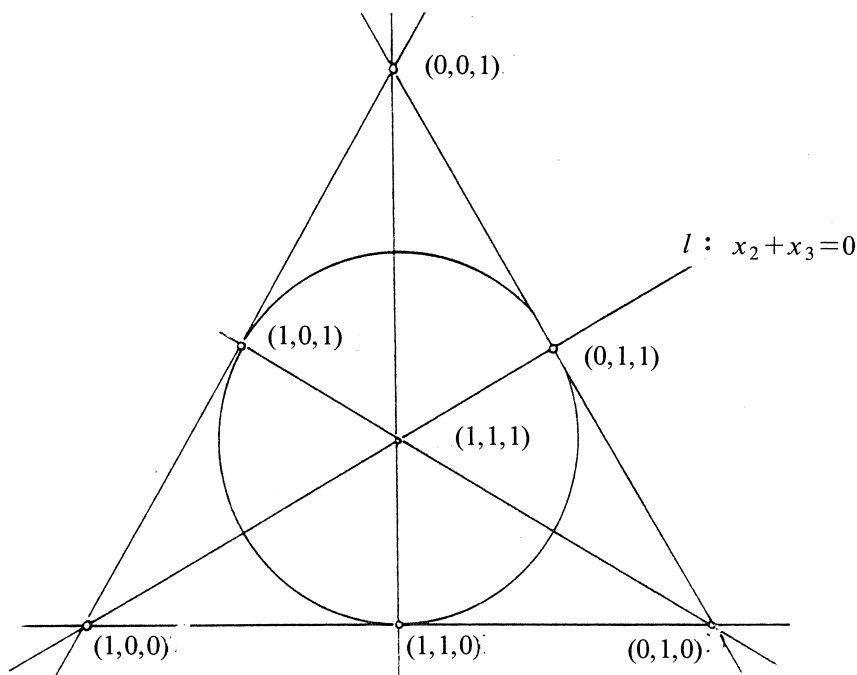
VOORBEELD 1. Kies voor K de gehele getallen mod 3 (d.w.z. het lichaam \mathbb{F}_3) en $d = 2$. We vinden $AG(2, 3)$, het affiene vlak van de orde 3:



Figuur 1

De lijn l met vergelijking $x_1 + x_2 = 1$ bestaat uit de punten $(0,1)$, $(1,0)$ en $(2,2)$. Er zijn 12 lijnen in deze meetkunde.

VOORBEELD 2. De 3-dimensionale affiene ruimte over \mathbb{F}_2 heeft 7 lijnen door O . Zo vinden we het volgende model van $PG(2,2)$, ook bekend als het Fano-vlak:



Figuur 2

De punten $(1,1,0)$, $(1,0,1)$ en $(0,1,1)$ vormen de lijn met vergelijking $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ (de vergelijking van een vlak door O in $A_3(\mathbb{F}_2)$).

VOORBEELD 3. De 4-dimensionale affiene ruimte over \mathbb{F}_3 bestaat uit 81 punten. Op een lijn door O liggen behalve O nog 2 punten. De ruimte $PG(3,3)$ bestaat dus uit 40 (dat is $1/2 \times 80$) punten. Als we het vlak met vergelijking $x_4 = 0$ weglaten, houden we 27 punten $(x_1, x_2, x_3, 1)$ over die $AG(3,3)$ vormen.

Volledigheidshalve herinneren we ook aan de combinatorische definitie van een projectief vlak (cf. [2], [3], [6]). Dit is een stelsel van z.g. 'punten' en 'lijnen' met een incidentierelatie zó dat ieder tweetal verschillende punten (resp. lijnen) incident is met precies één lijn (resp. punt), waarbij triviale gevallen worden uitgesloten. Een eindig projectief vlak van de *orde* n heeft $n^2 + n + 1$ punten en $n^2 + n + 1$ rechten. Door één rechte weg te laten, ontstaat een affien vlak van de orde n .

2. CIRKELS EN LIJNEN IN \mathbb{R}^2

We voegen aan het vlak \mathbb{R}^2 een extra punt toe dat we ∞ noemen. We spreken af dat dit punt wordt toegevoegd aan iedere rechte lijn. Daarna noemen we rechte lijnen verder 'cirkels door ∞ '. Als we ook nog \mathbb{R}^2 identificeren met \mathbb{C} (d.w.z. (x,y) wordt geïdentificeerd met $z = x + iy$) en met het symbool ∞ op de gebruikelijke (slordige) manier rekenen, dan zijn de volgende feiten eenvoudig te controleren.

(2.1) Iedere cirkel heeft een vergelijking van de vorm

$$pz\bar{z} + \bar{q}z + q\bar{z} + r = 0 \quad (p \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}, pr < q\bar{q})$$

en omgekeerd.

(2.2) De transformaties

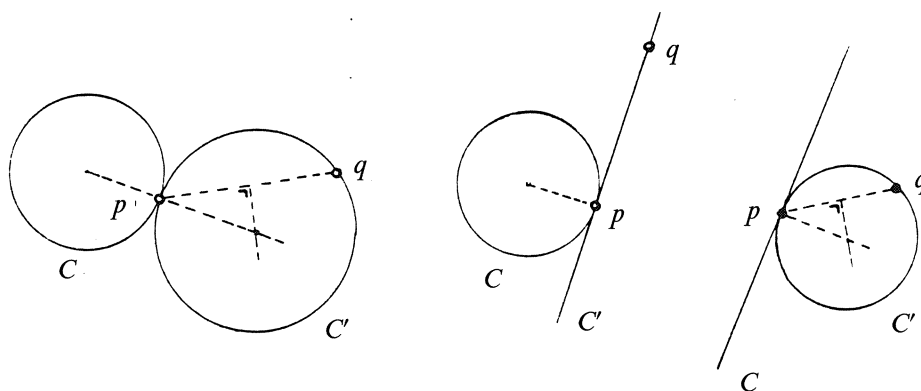
$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{met } ad - bc = 1$$

voeren cirkels in cirkels over.

Om de laatste bewering in te zien, toont men eerst aan dat deze z.g. *Möbius-transformaties* zijn samen te stellen uit translaties $z \mapsto z + s$, draaiingen en vermenigvuldigingen $z \mapsto tz$, en tenslotte de 'inversie' $z \mapsto -1/z$. Voor de eerste twee afbeeldingen is de bewering triviaal. Voor de laatste volgt het gestelde door substitutie direct uit (2.1).

(2.3) De collectie cirkels in $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ heeft de eigenschappen:

- (i) door drie verschillende punten gaat precies één cirkel;
- (ii) als p op de cirkel C ligt en q ligt niet op C , dan gaat door q precies één cirkel C' die C in p raakt (zie Figuur 3).



Figuur 3

Een belangrijke eigenschap van de Möbius-transformaties die we in §5 zullen gebruiken is de volgende.

- (2.4) Bij gegeven verschillende punten A, B, C en verschillende punten P, Q, R is er precies één Möbius-transformatie die A in P , B in Q , en C in R afbeeldt.

Deze transformatie $w = f(z)$ vinden we door w op te lossen uit

$$(2.5) \quad \frac{w-P}{w-Q} : \frac{R-P}{R-Q} = \frac{z-A}{z-B} : \frac{C-A}{C-B}.$$

3. EINDIGE MÖBIUS-VLAKKEN

- (3.1) DEFINITIE. Een *Möbius-vlak* is een systeem van twee soorten objecten die we ‘punten’ en ‘cirkels’ noemen met een incidentierelatie I (pIC spreken we uit als: ‘ p ligt op de cirkel C ’ of ‘ C gaat door p ’ of ‘ p is incident met C ’), waarbij aan de volgende eisen voldaan moet zijn:
- (i) (2.3) (i) en (2.3) (ii) gelden (hierbij spreken we af dat ‘ C raakt C'' hetzelfde is als ‘er is precies één punt p met pIC en pIC'' ’);
 - (ii) het systeem is niet triviaal (hiertoe kan men b.v. eisen dat er tenminste 4 punten zijn en verder een paar p, C met $p \not\in C$ en dat iedere cirkel door tenminste één punt gaat),
- (zie [1], [2], [5]).

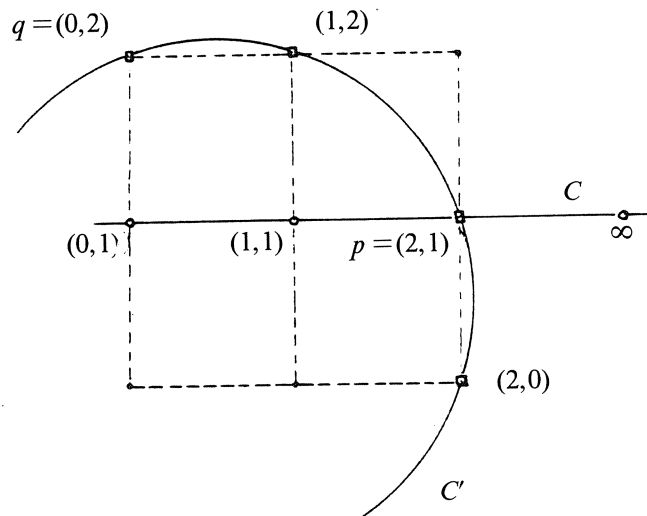
In de vorige paragraaf hebben we een Möbius-vlak leren kennen. We vragen nu naar een voorbeeld met eindig veel punten. Stel dat \mathfrak{M} zo'n vlak is. Kies een punt $p \in \mathfrak{M}$. We beschouwen nu alleen de cirkels door p en laten vervolgens het punt p weg. We krijgen zo een stelsel van punten en objecten die we ‘lijnen’ noemen. Voor het nieuwe stelsel geldt dan:

- (i') door twee punten gaat precies één lijn,
- (ii') als q niet op de lijn L ligt, dan gaat door q precies één lijn die L niet snijdt.

Aangevuld met de vertaling van (3.1) (ii) zijn dit de axioma's voor een affien vlak! Dit brengt ons op het idee om te proberen een Möbius-vlak te construeren door uit te gaan van een affien vlak en aan alle lijnen een extra punt (het punt p van hierboven), dat we ∞ noemen, toe te voegen. De moeilijkheid is nu om ‘echte’ cirkels te definiëren.

VOORBEELD 4. We proberen een Möbius-vlak met 10 punten te construeren door uit te gaan van $AG(2,3)$ (zie Voorbeeld 1). Daar iedere cirkel na weglating van één punt p overgaat in een lijn van een $AG(2,3)$, moeten cirkels incident zijn met 4 punten. Dus bevat iedere cirkel 4 drietallen punten. In totaal zijn er $\binom{10}{3} = 120$ drietallen punten waarvan elk precies één cirkel bepaalt. Er moeten dus 30 cirkels zijn. Hiervan hebben we er al 12, n.l. de lijnen van

$AG(2,3)$ aangevuld met het punt ∞ . We zien dus dat we voor ieder van de 9 punten van het vlak 2 cirkels moeten bedenken (laten we zeggen met dat punt als ‘middenpunt’). Het is niet moeilijk een goede gok te doen, b.v. door als cirkels met middelpunt (a,b) te kiezen de viertallen $\{(a+1, b), (a-1, b), (a, b+1), (a, b-1)\}$ en $\{(a+1, b+1), (a+1, b-1), (a-1, b+1), (a-1, b-1)\}$. We hebben zo inderdaad een stelsel van 12 punten en 30 cirkels geconstrueerd dat aan de eisen van (3.1) voldoet. Het zal de lezer geen moeite kosten na te gaan dat aan (2.3) (ii) is voldaan (zie Figuur 4).



Figuur 4

Nu we gezien hebben dat eindige Möbius-vlakken bestaan, proberen we enige eigenschappen van deze vlakken af te leiden. We nemen als bekend aan (zie §1) dat een affien vlak van de orde n bestaat uit n^2 punten en $n^2 + n$ lijnen (zie [2], [3], [6]). Met behulp van de hierboven gebruikte methode volgen onmiddellijk de volgende eigenschappen van een Möbius-vlak \mathfrak{M} van de orde n :

- (3.2) \mathfrak{M} heeft $n^2 + 1$ punten,
- (3.3) \mathfrak{M} heeft $n(n^2 + 1)$ cirkels,
- (3.4) iedere cirkel is incident met $n + 1$ punten,
- (3.5) ieder punt is incident met $n(n + 1)$ cirkels.

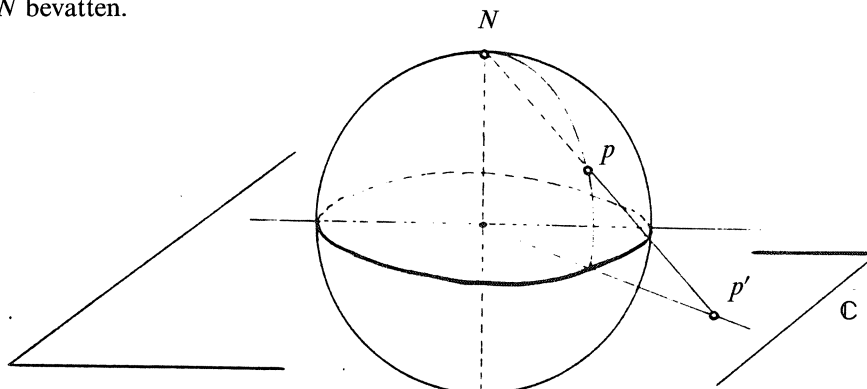
Deze eigenschappen zijn allemaal door tellen te bewijzen. Evenals in de vlakke meetkunde noemen we de collectie cirkels door twee gegeven punten p en q de *bundel* met p en q als dragers. Evenzo noemen we de collectie cirkels die elkaar in een punt p raken een *raakbundel*. Door eenvoudig te tellen vinden we nu:

- (3.6) een cirkelbundel bestaat uit $n + 1$ cirkels,
- (3.7) een raakbundel bestaat uit n cirkels.

Zo vormen in Figuur 4 de cirkels C , C' en $\{(0,0), (1,0), (2,1), (2,2)\}$ een raakbundel door p . Men kan nu allerlei begrippen en stellingen uit de vlakke meetkunde die betrekking hebben op cirkels proberen te generaliseren. We zullen in §6 een voorbeeld van zo'n stelling nader bekijken.

4. STEREOGRAFISCHE PROJECTIE

We beschouwen nog eens de in §2 bestudeerde collectie cirkels in \mathbb{R}^2 . We nemen nu \mathbb{R}^2 als het vlak $z = 0$ in \mathbb{R}^3 . Zij B de bol met vergelijking $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ en zij N de 'noordpool' van de bol, d.w.z. $(0,0,1)$. We projecteren de bol vanuit N op het vlak $z = 0$ dat we weer met \mathbb{C} identificeren. We spreken verder af dat ∞ de projectie van N zelf is. Het beeld van $P = (\xi, \eta, \zeta)$ is $P' = (\xi + i\eta)/(1 - \zeta)$. Met behulp van (2.1) is eenvoudig in te zien dat cirkels op de bol worden afgebeeld op cirkels in $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. De cirkels door ∞ (d.w.z. rechten) zijn de beelden van de cirkels op de bol die het punt N bevatten.



Figuur 5

We kunnen het Möbius-vlak $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ dus opvatten als de stereografische projectie van het stelsel snijkrommen van B met de vlakken in \mathbb{R}^3 . Door dit idee te generaliseren kunnen we nu eenvoudig eindige Möbius-vlakken construeren. Beschouw in de 3-dimensionale projectieve ruimte $PG(3, q)$ een niet-ontaarde kwadriek B waar geen lijnen op liggen (zie [2]). Ieder drietal punten van B bepaalt één vlak. De snijfiguur met B noemen we nu een cirkel! Om (2.3) (ii) aan te tonen, snijden we het vlak van C met het raakvlak aan B door p . De snijlijn ℓ bepaalt met q een vlak dat B in de gevraagde cirkel C' snijdt. (We gebruiken hier steeds onze meetkundige intuïtie geldig in \mathbb{R}^3 .) Desgewenst kunnen we door projectie de verkregen configuratie afbeelden op een vlak.

VOORBEELD 5. Daar de vergelijking van de eenheidsbol in \mathbb{R}^3 in homogene coördinaten $x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0$ is, proberen we voor B de kwadriek met dezelfde vergelijking in $PG(3,3)$. In tabel 1 geven we een lijst van de 10 punten van B . We noemen $N = (0,0,1,1)$ weer de noordpool en projecteren B op het vlak $z = 0$. We moeten weer een extra punt ∞ toevoegen dat de rol speelt van de projectie van N zelf. De overige 9 punten in het vlak $z = 0$ blijken de 9 punten van het affiene vlak $AG(2,3)$ te zijn (zie tabel 1). Dit is zo omdat voor de punten (ξ, η, ζ, t) van $B \setminus \{N\}$ geldt $\zeta \neq t$. Daarom is voor de projectie $(\xi, \eta, 0, t - \zeta)$ steeds $t - \zeta \neq 0$. Daardoor kunnen we $(\xi, \eta, 0, t - \zeta)$ identificeren met het punt $(x, y) = (\xi/(t - \zeta), \eta/(t - \zeta))$ van $AG(2,3)$.

(ξ, η, ζ, t) op B	projectie op $z = 0$	coördinaten in $AG(2,3)$
$N = (0,0,1,1)$	∞	
$(0,0,-1,1)$	$(0,0,0,1)$	$(0,0)$
$(0,1,0,1)$	$(0,1,0,1)$	$(0,1)$
$(0,-1,0,1)$	$(0,-1,0,1)$	$(0,2)$
$(1,0,0,1)$	$(1,0,0,1)$	$(1,0)$
$(-1,0,0,1)$	$(-1,0,0,1)$	$(2,0)$
$(1,1,1,0)$	$(-1,-1,0,1)$	$(2,2)$
$(1,1,-1,0)$	$(1,1,0,1)$	$(1,1)$
$(1,-1,1,0)$	$(-1,1,0,1)$	$(2,1)$
$(1,-1,-1,0)$	$(1,-1,0,1)$	$(1,2)$

TABEL 1

We beschouwen in $PG(3,3)$ de vlakken $V_1: y + z - t = 0$ en $V_2: x + y + t = 0$. Deze vlakken snijden elkaar in de lijn $\lambda(1, -1, 1, 0)$ en $\mu(0, -1, -1, 1)$ die B in $(1, -1, 1, 0)$ raakt. Bepalen we de snijfiguur van B en V_1 resp. B en V_2 dan vinden we rakende cirkels op de bol. De projectie bepalen we via tabel 1. We vinden dan de rakende cirkels C en C' uit Figuur 4.

5. MÖBIUS-TRANSFORMATIES

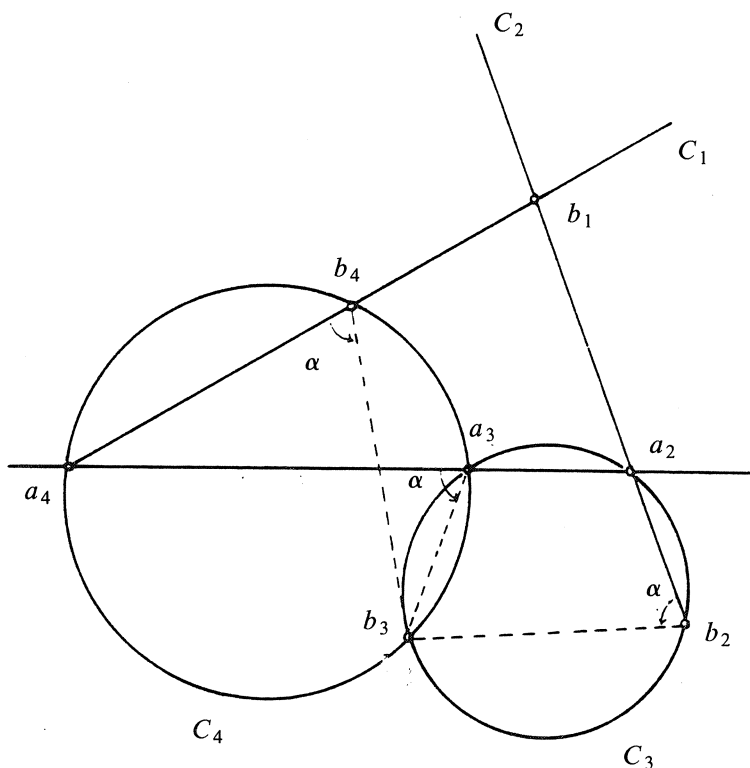
De in §2 behandelde Möbius-transformaties en i.h.b. (2.4) geven ons een directe manier om een Möbius-vlak te construeren. Volgens (2.4) kunnen we alle cirkels in $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ vinden door uit te gaan van de reële as en daarop alle Möbius-transformaties toe te passen. Door nu \mathbb{C} te vervangen door het lichaam \mathbb{F}_q en de reële as door het deellichaam \mathbb{F}_q en hierop alle transformaties $x \mapsto (ax + b)/(cx + d)$ met $ad - bc = 1$ toe te passen, vinden we een stelsel van $q(q^2 + 1)$ deelverzamelingen van $\mathbb{F}_q \cup \{\infty\}$ die we weer cirkels noemen. Ieder drietal elementen van $\mathbb{F}_q \cup \{\infty\}$ bepaalt precies één van die cirkels. Ook aan (2.3) (ii) is weer voldaan.

VOORBEELD 6. We gaan uit van \mathbb{F}_3 met elementen $0,1,2$. Hierin is $-1 = 2$ niet een kwadraat. Door adjunctie van het element i met $i^2 = -1$ vinden we het lichaam \mathbb{F}_9 met elementen $a+bi$ (waarbij a en b uit $\{0,1,2\}$). We tonen aan dat we op deze manier ook weer de cirkel C' uit Figuur 4 vinden. In (2.5) nemen we $A = 0$, $B = 1$, $C = \infty$ en $P = (2,1) = 2+i$, $Q = (0,2) = 2i$, $R = (2,0) = 2$. We vinden dan $W = \frac{-z-(1+i)}{z+i}$. Door invullen van $z = -1$ vinden we het beeld $1-i = (1,2)$, het vierde punt van de cirkel C' uit Figuur 4.

OPGAVE. Construeer op de manier van §4 en §5 een Möbius-vlak met 26 punten.

6. DE STELLING VAN MIQUEL

We bewijzen eerst een wellicht wat minder bekende stelling uit de vlakke meetkunde. We beschouwen 4 cirkels C_1, C_2, C_3, C_4 waarvan géén drie door één punt gaan. De cirkel C_1 snijdt C_2 in a_1 en b_1 ; C_2 snijdt C_3 in a_2 en b_2 , enz. De stelling zegt dat als a_1, a_2, a_3 en a_4 op één cirkel liggen, dan ook het viertal b_1, b_2, b_3, b_4 op één cirkel ligt. Om deze stelling te bewijzen passen we (2.2) toe. We voeren a_1 over in ∞ . De stelling is dan weergegeven in Figuur 6.



Figuur 6

als a_2, a_3 en a_4 op een rechte liggen, dan is $b_1 b_2 b_3 b_4$ een koordenvierhoek. De in de figuur met α aangegeven hoeken zijn voldoende om in te zien dat de bewering triviaal is! Hiermee is deze z.g. *stelling van Miquel* (1838) algemeen bewezen (zie [2], [5]). Men kan zich nu afvragen of deze stelling reeds volgt uit de axioma's van een Möbius-vlak. Dit is niet het geval. Er zijn voorbeelden geconstrueerd van Möbius-vlakken waarvoor de stelling van Miquel niet geldt. In 1935 bewezen Van der Waerden & Smid (zie [7]) dat de Möbius-vlakken geconstrueerd via de methode van §4 de enige Möbius-vlakken zijn waarvoor de stelling wel geldt. Evenals het probleem van de existentie van affiene vlakken is ook nog lang niet opgelost voor welke n een Möbius-vlak van de orde n bestaat.

LITERATUUR

1. W. BENZ, *Vorlesungen über Geometrie der Algebren*, Springer Verlag, Berlijn, 1973.
2. P. DEMBOWSKI, *Finite Geometries*, Springer Verlag, New York, 1968.
3. M. HALL, *Combinatorial Theory*, Blaisdell Publ. Co., Waltham Mass. 1967.
4. D.R. HUGHES & F.C. PIPER, *Projective Planes*, Springer Verlag, New York, 1973.
5. F. KARTESZI, *Introduction to Finite Geometries*, North-Holland, Amsterdam, 1976.
6. H.J. RYSER, *Combinatorial Mathematics*, Carus Math. Monographs 14 (Math. Assoc. of America).
7. B.L. VAN DER WAERDEN & L.J. SMID, *Eine Axiomatik der Kreisgeometrie und der Laguerre-Geometrie*, Math. Annalen **110** (1935), 753-776.

Geschiedenis van de Synthetische Projectieve Meetkunde

Methodes uit de eerste helft van de 19de eeuw

C.G.J. Nagtegaal

Voordracht van de vakantiecursus uit 1978

1. INLEIDING

Het onderwerp van deze voordracht betreft de geschiedenis van de synthetische meetkunde in de eerste helft van de 19de eeuw. Nu is zelfs deze periode van vijftig jaar nog te groot om hier uitputtend behandeld te worden; bovendien zijn er vele uitgangspunten, van waaruit men de geschiedenis kan bekijken, mogelijk.

Daarom is deze voordracht gebaseerd op de keuze van zo'n uitgangspunt en daarmee samenhangend de selectie van te behandelen onderwerpen.

Om duidelijk te maken wat mijn uitgangspunt inhoudt, moeten we tijdelijk de geschiedenis opschorten, ten gunste van enkele algemene beschouwingen over meetkunde en het verband met de algebra.

1.1. *Het getal in de meetkunde*

In de meetkunde zoals die tegenwoordig op de middelbare scholen wordt gedoceerd is een prominente rol weggelegd voor het getal. Rechten in die meetkunde zijn in wezen getallenrechten, punten zijn tripels getallen. Het vinden van snijpunten van rechten komt neer op het oplossen van vergelijkingen, een algebraïsche bezigheid, die uiteindelijk weer leidt tot het vinden van getallen.

De vraag dient zich aan of deze meetkunde nu meetkunde is of algebra. Wat blijft er van de meetkunde over als we afzien van het gebruik van getallen?

Aan de andere kant: voor de middelbare-schoolmeetkunde gebruiken we het lichaam van de reële getallen, het is echter ook mogelijk om meetkunde te bedrijven met andere getallen dan de reële. We zullen daar twee voorbeelden van bekijken.

1.1.1. *Een eindige meetkunde*

Beschouw het lichaam van karakteristiek 2: \mathbb{Z}_2 , bestaande uit de elementen 0 en 1, waarmee modulo 2 wordt opgeteld en vermenigvuldigd. Neem de volgende voorschriften:

- *punten* zijn tripels:

$$P_1 = [0,1,0] \quad P_5 = [0,0,1]$$

$$P_2 = [1,1,0] \quad P_6 = [0,1,1]$$

$$P_3 = [1,0,0] \quad P_7 = [1,1,1] \quad P_4 = [1,0,1]$$

- rechten zijn tripels:

$$l_1 = [0,0,1] \quad l_5 = [0,1,1]$$

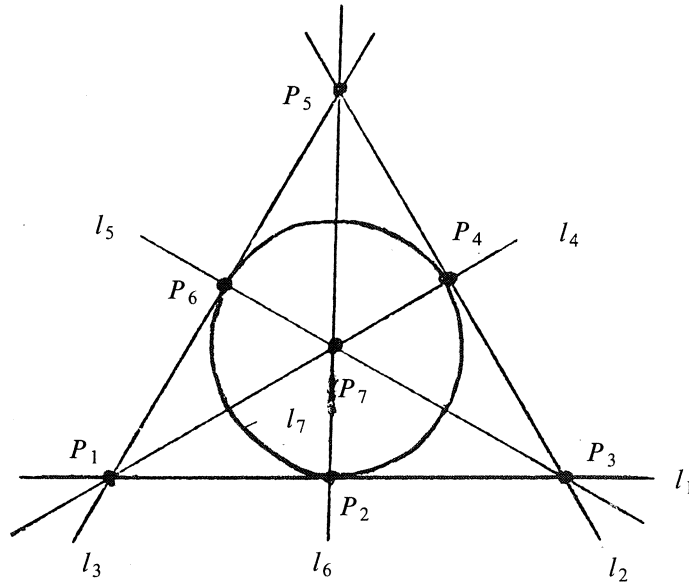
$$l_2 = [0,1,0] \quad l_6 = [1,1,0]$$

$$l_3 = [1,0,0] \quad l_7 = [1,1,1]$$

$$l_4 = [1,0,1]$$

- *incidentie* van een punt $P_i = [a,b,c]$ en een rechte $l_i = [x,y,z]$ met $a,b,c,x,y,z \in \mathbb{Z}_2$ wordt gegeven door $ax + by + cz = 0$.

Enige uitzoekerij levert Figuur 1 op:



Figuur 1

OPMERKING. De 'ingeschreven cirkel' l_7 moet in deze meetkunde als een rechte worden opgevat.

Het bovenstaande levert een meetkunde op die uit precies 7 punten en 7 rechten bestaat. Niettemin voldoet deze meetkunde aan de eisen, die men doorgaans als basisaxioma's aanneemt voor een projectieve meetkunde, n.l.:

I1: elk tweetal rechten heeft een snijpunt;

I2: elk tweetal punten heeft een verbindingsrechte;

V: er is een (echte) vierhoek.

Indien men een eenvoudige voorziening treft voor evenwijdige lijnen (via parallelklassen o.i.d.), dan voldoet ook de middelbare-schoolmeetkunde aan deze regels.

We zien dat de zojuist beschreven structuur van 7 punten en 7 rechten moet worden opgevat als een volwaardige meetkunde. Uiteraard hangt de eindigheid ervan samen met de eindigheid van de getallenverzameling die we gebruiken hebben.

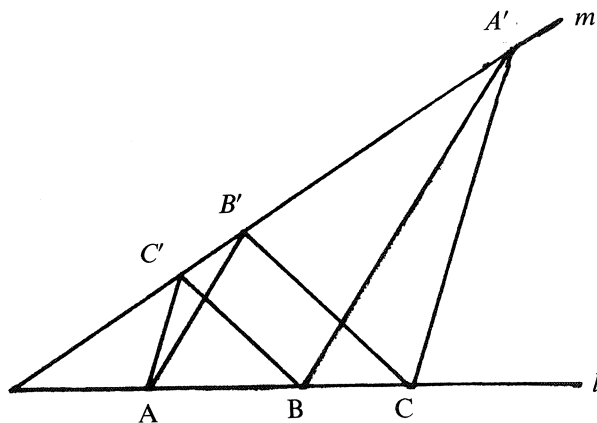
Als we nog verder gaan dan deze oppervlakkige waarneming, dan zullen we zien dat de (algebraïsche) eigenschappen van de bewerkingen op de getallenverzameling, die we kiezen om een meetkunde te bouwen, nauw verweven zijn met de inwendige structuur van die meetkunde.

Om hierover de gedachten te bepalen, geven we een voorbeeld dat het verband toont tussen de commutativiteit van de vermenigvuldiging en de stelling van Pappus-Pascal.

1.1.2. De stelling van Pappus-Pascal als meetkundig equivalent van de commutativiteit van de vermenigvuldiging

Voor de goede orde:

STELLING (PAPPUS-PASCAL). Gegeven zijn twee rechten l en m , met op l de punten A, B, C en op m de punten A', B', C' . Als $CB' \parallel BC'$ en $CA' \parallel AC'$, dan ook $BA' \parallel AB'$ (vgl. Figuur 2).

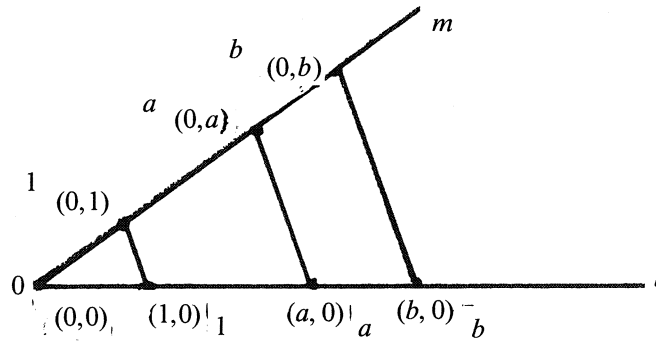


Figuur 2

(De projectieve versie spreekt uit: de snijpunten $CB' \cap BC'$, $CA' \cap AC'$, $BA' \cap AB'$ liggen op één rechte. In onze versie is deze rechte de oneindige.)

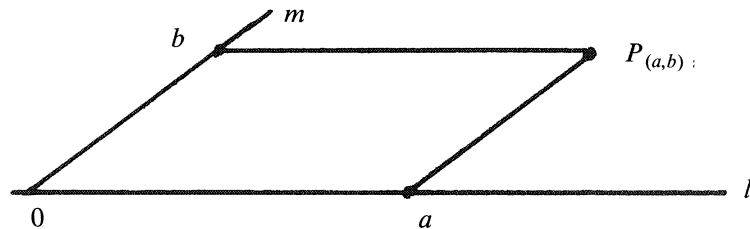
We gaan nu uit van een vlakke meetkunde, waarin op een gebruikelijke wijze coördinaten aan de punten worden toegekend: Kies twee rechten l en m door een punt O als (niet noodzakelijk loodrechte) 'coördinaatassen'.

$0, 1, a, b, c, \dots$ zijn elementen van een coördinatenverzameling, waarop een optelling en vermenigvuldiging zijn gedefinieerd. O wordt $(0,0)$, we kiezen $(1,0)$ en $(0,1)$ op l resp. m . Verder veronderstellen we $(a, 0)$, $(b, 0), \dots$ op l gegeven. Op m krijgen we $(0, a)$, $(0, b), \dots$ door evenwijdig aan de lijn $((1,0), (0,1))$ de lijnen $((a, 0), (0, a))$, $((b, 0), (0, b)), \dots$ te trekken (vgl. Figuur 3).



Figuur 3

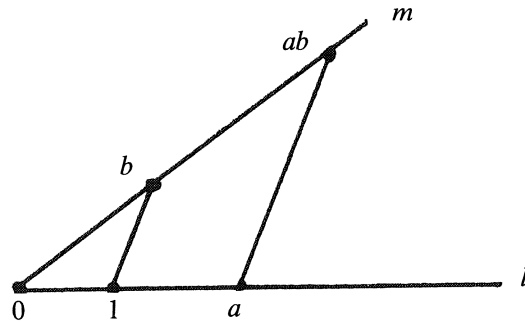
Het punt P in Figuur 4 krijgt dan de coördinaten (a, b) :



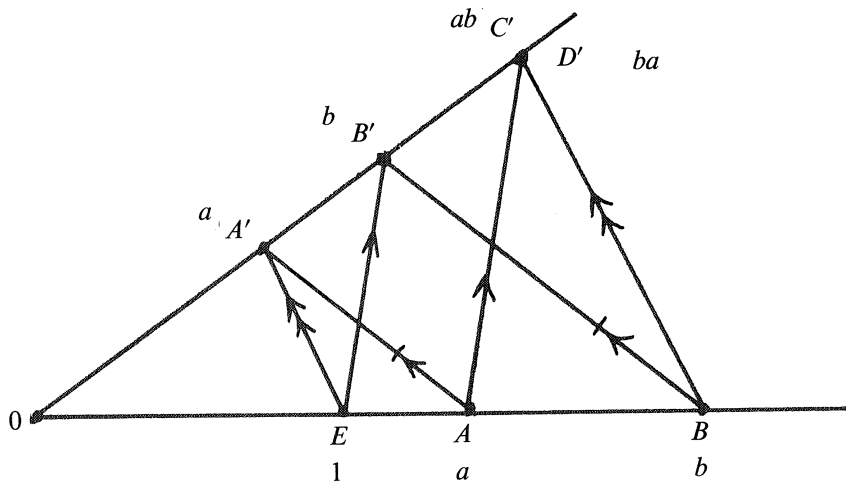
Figuur 4

De vermenigvuldiging ab is op te vatten als een puntvermenigvuldiging vanuit O met factor a , d.w.z.: ab verkrijgen we door vanuit $(a, 0)$ een rechte evenwijdig aan $((1,0), (0,b))$ te trekken (vgl. Figuur 5).

Hoe staat het nu met de commutativiteit van de vermenigvuldiging? Beschouw Figuur 6. $OC' = ab$ vinden we uit $AC' \parallel EB'$. $OD' = ba$ vinden we uit $BD' \parallel EA'$. Verder hebben we: $AA' \parallel BB'$. Als de stelling van Pappus-Pascal geldt, volgt uit: $AA' \parallel BB'$ en $AC' \parallel EB'$ dat: $EA' \parallel BC'$. We hadden uit de constructie van ba : $BD' \parallel EA'$. Wegens de uniciteit van de parallel volgt dan: $C' = D'$ ofwel $ab = ba$. Meetkundig is dus afgeleid: de vermenigvuldiging is commutatief.



Figuur 5



Figuur 6

Omgekeerd volgt in Figuur 6 uit $ab=ba$ dat $C'=D'$, dus aangezien $BD' \parallel EA'$ ook: $BC' \parallel EA'$. Omdat $AA' \parallel BB'$ en $AC' \parallel EB'$ volgt hieruit dat voor de configuratie uit Figuur 6 de stelling van Pappus-Pascal geldig is. Men kan laten zien dat hij dan voor het hele vlak geldig is.

We zien dat de stelling van Pappus-Pascal het meetkundig equivalent is van de commutativiteit van de vermenigvuldiging op de coördinatenverzameling.

Zo geldt dat de stelling van Desargues het equivalent is van de associativiteit van de vermenigvuldiging. Bij andere eigenschappen van de coördinatenverzameling zijn er weer andere meetkundige stellingen die ermee equivalent zijn.

1.2. De moderne aanpak

Uit het bovenstaande wordt wel duidelijk dat er een nauw verband bestaat tussen meetkundige en algebraïsche eigenschappen. Dit verband is onderwerp geweest van betrekkelijk recent onderzoek.

Globaal gezien is de gang van dit onderzoek: uitgaande van een aantal meetkundige axioma's wordt met behulp van synthetische methoden (d.w.z. alleen met 'snijden en verbinden') vastgesteld wat de meetkundige eigenschappen zijn. Dan wordt verondersteld dat de meetkunde gecoördinatieerd is, maar over de eigenschappen van de coördinatenverzameling worden geen a priori uitspraken gedaan. Deze algebraïsche eigenschappen worden vervolgens meetkundig afgeleid (vgl. de afleiding van de commutativiteit met behulp van de stelling van Pappus-Pascal). Daarna kan men de coördinatenverzameling concreet invullen.

Belangrijk voor ons is: deze manier van meetkunde bedrijven begint niet meteen als analytische meetkunde met een gegeven coördinatisering, maar maakt gebruik van synthetische methoden om meetkundige eigenschappen af te leiden.

Die aanpak vinden we terug in het stukje geschiedenis dat we gaan bekijken, met echter één belangrijk verschil: de vraagstelling van de 19de eeuwse meetkundigen is anders dan de moderne.

1.3. De 19de eeuwse opvatting

De situatie aan het eind van de 18de eeuw is, wat de meetkundige grondslagen betreft, betrekkelijk eenvoudig. Men gaat uit van het bestaan van slechts één meetkunde—d.i. de meetkunde van de ruimte die ons omringt. De analytische meetkunde, die sinds Descartes een bloeiend bestaan leidt, lijkt van de werkelijkheid een betrouwbare beschrijving te geven. De hierboven beschreven moderne opvatting dat er meerdere 'meetkundes' zijn en dat men er weliswaar algebraïsche beschrijvingen van kan geven, maar dat de algebraïsche eigenschappen van de te gebruiken coördinatenverzameling eerst meetkundig moeten worden afgeleid—die opvatting blijft nog minstens honderd jaar toekomstmuziek.

Toch vinden we aan het begin van de 19de eeuw een stroming onder de meetkundigen, die het gebruik en de ontwikkeling van synthetische methoden propageert. De motivatie hiervoor moet meer in het filosofische vlak worden gezocht, n.l. in de vraag: wat is echte meetkunde, welke methoden verschaffen de ware meetkundige kennis?

Een van de mogelijke antwoorden is: ware meetkundige kennis kan slechts door synthetisch-meetkundige methoden verkregen worden; algebra is een aan de meetkunde wezensvreemde discipline, omdat het getal een aan de ruimte vreemd begrip is. Dit is het standpunt van waaruit we drie wiskundigen wat uitgebreider zullen behandelen: Poncelet, Steiner en Von Staudt. De eerste twee gaat het vooral om het ontwikkelen en verfijnen van synthetische methoden. Bij de laatste zijn deze methoden in een streng geheel ingepast. Von Staudt geeft bovendien een manier (overeenkomend met de moderne) aan, waarop het getal weer in de meetkunde kan worden ingebracht.

2. HET BEGIN VAN DE SYNTHETISCHE PROJECTIEVE MEETKUNDE

De twee beroemdste stellingen uit de projectieve meetkunde zijn waarschijnlijk de stelling van Pascal en de stelling van Desargues. Dit zou duiden op de beoefening van projectieve meetkunde in de 17de eeuw. Formeel gezien is dit juist, maar de stelling van Pascal is een incidenteel resultaat en het werk van Desargues is zelfs geruime tijd vergeten geweest: daarom beginnen wij ons verhaal aan het begin van de 19de eeuw.

2.1. *École Polytechnique; Poncelet*

Aan het eind van de 18de eeuw, begin 19de eeuw is er in Frankrijk aan de École Polytechnique een kring van wiskundigen, vooral gevormd door leerlingen en collega's van Gaspard Monge, waarin de meetkunde in de belangstelling staat.

Van Monge zelf verschijnt in 1799 de *Traité de géométrie descriptive*. Hij leidt hierin af hoe men op de eenvoudigste wijze informatie kan verkrijgen uit twee vlakke orthogonale projecties van een driedimensionaal object (een projectie op een horizontaal vlak en een op een verticaal vlak). Monge maakt hierbij gebruik van synthetische methoden. Deze manier van werken is van nut voor de leer van het perspectief, voor de architectuur, voor de fortbouw etc. Wat dit laatste betreft: ik wil eraan herinneren dat de École Polytechnique een opleiding was voor het vormen van militair kader. Op dit werk van Monge is in de projectieve meetkunde niet rechtstreeks voortgebouwd, voor ons verhaal vervult Monge dan ook meer de rol van katalysator en inspirator van het gebruik van synthetische methoden.

Van directer belang is Jean Victor Poncelet, één van de wiskundigen uit de kring rond Monge, waarvan b.v. ook Lazare Carnot en Brianchon deel uitmaken. Poncelet diende als officier onder Napoleon tijdens de campagne tegen Rusland. Daar wordt hij krijgsgevangen gemaakt, de jaren 1813-1814 brengt hij door in Saratoff in Rusland. Daar reconstrueert hij uit het geheugen wat hij van Monge heeft geleerd en bouwt daarop voort. Weer terug in Frankrijk breidt hij dit werk nog uit; het wordt in 1822 gepubliceerd als de *Traité des propriétés projectives des figures*. In de 'Préface' van dit werk schrijft Poncelet:

Cet ouvrage est le résultat des recherches qui j'ai entreprises, dès le printemps de 1813, dans les prisons de la Russie: privé de toute espèce de livres et de secours, sur-tout distrait par les malheurs de ma patrie et les miens propres ...

2.2. *Poncelet's 'Traité'*

Het werk is een niet-streng georganiseerd geheel van op synthetische wijze verkregen resultaten uit de projectieve meetkunde. Het steunt op drie basisprincipes:

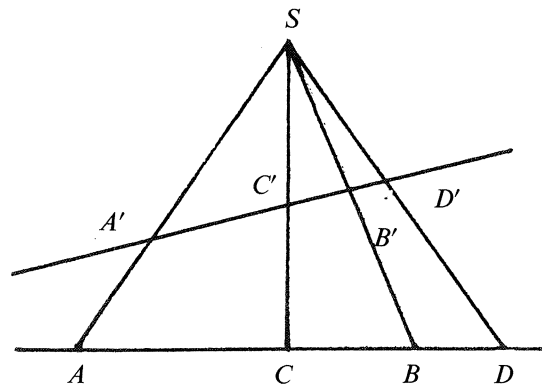
- a. Het principiële en systematische gebruik van centrale projecties.
- b. Het dualiteitsprincipe.
- c. Het 'principe de continuité'.

2.2.1. Het gebruik van projecties

Poncelet gebruikt projecties in een vergelijkbare opzet als die bij Monge: om eigenschappen van een gecompliceerde figuur te bestuderen aan de hand van een meer eenvoudige projectie van de figuur op een of ander vlak.

De gang van zaken bij b.v. kegelsneden is: elke kegelsnede is op te vatten als de projectie van een cirkel, d.i. de meest eenvoudige uit de klasse van krommen, die we kegelsneden noemen. De eigenschappen van de cirkel worden bestudeerd en daarnaast de eigenschappen van de projectie. Door combinatie van deze eigenschappen komt men tot eigenschappen van kegelsneden in het algemeen (vgl. het voor de eigenlijke 'Traité' opgenomen verslag van een zitting van de Académie Royale des Sciences, waarin Poncelet's werk besproken wordt, vooral p. vii en viij).

Het spreekt vanzelf dat de enige eigenschappen die zich op een dergelijke wijze laten bestuderen de z.g. 'projectieve invarianten' zijn. Tot de projectief invariante eigenschappen van een figuur horen niet de eigenschappen die betrekking hebben op de metriek, zoals 'afstand' of 'hoek'. Wel projectief invariant zijn de eigenschappen die samenhangen met de 'ligging' van punten en rechten (in het Frans heten diverse boeken over dit onderwerp *Géométrie de position*, in het Duits *Geometrie der Lage*, zoals dat van Von Staudt dat nog aan de orde komt). De bekendste van deze eigenschappen is die van de 'harmonische ligging'; deze komt ook bij Poncelet voor.



Figuur 7

Als A, B, C, D harmonisch liggen, dan ook A', B', C', D' .

Poncelet noemt de punten A, B, C, D harmonisch als $\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}$, d.w.z. de lijn AB wordt door de punten C en D verdeeld in 'segmens proportionnels' (p. 12/13). Merk op dat hier de projectieve invariant 'harmonische ligging' gekarakteriseerd wordt met behulp van afstanden die op zich niet invariant zijn; we komen hier nog op terug. Overigens komt deze wijze van definiëren overeen met de karakterisering: A, B, C, D liggen harmonisch als

$DV(A,B,C,D) = -1$. ($DV(A,B,C,D) = \frac{AD}{BD} : \frac{AC}{BC}$, de dubbelverhouding van de vier afstanden.)

2.2.2. Het dualiteitsprincipe

In een modern opgezette projectieve meetkunde ligt het dualiteitsprincipe opgesloten in de axioma's waarvan men uitgaat.

Voor het vlak komt het principe neer op: als P een geldige stelling is in de meetkunde en P' is de uitspraak die uit P wordt verkregen door in P alle woorden 'punt' te vervangen door 'rechte' en tegelijkertijd alle woorden 'rechte' door 'punt', dan is ook P' een geldige stelling (vgl. de duale opzet van de axioma's I1 en I2 uit 1.1.1).

Bij Poncelet komt het principe alleen naar voren bij zijn behandeling van polen en poollijnen van kegelsneden. Dualiteit komt dan niet voor in bovenstaande vorm, maar als polaire reciprociteit. Vgl. hierbij p. 106:

Si un certain point est situé sur une ligne droite tracée dans le plan d'une section conique, sa polaire passera par le pôle de cette même droite.

Al snel na het verschijnen van de 'Traité' (misschien al tegelijkertijd of zelfs ervóór, er is in ieder geval een vlammeende prioriteitenstrijd hierover geweest tussen Poncelet en Gergonne) ziet men in dat, op grond van de incidentie-eigenschappen, de duale reciprociteit opgaat voor het gehele vlak. Het principe werkt dan zelfs door in de lay-out van de geschriften: de werken worden in twee kolommen gedrukt, waarbij de ene kolom qua inhoud de duale is van de andere (ook bij Steiner en Von Staudt zullen we dit nog tegenkomen).

2.2.3. Het 'principe de continuité'

Dit principe komt—zij het niet goed onderbouwd of omschreven—ook al voor bij Monge. Ook Poncelet slaagt er niet in het nauwkeurig te funderen, maar hij gebruikt het wel systematisch, o.a. bij de bestudering van kegelsneden. In het eerder genoemde verslag van de zitting van de Ac.Roy.d.Sc. levert Cauchy een vrij stevige kritiek op het principe. Hij erkent dat Poncelet via het gebruik van het principe tot exacte resultaten komt, maar is bang dat bij gebruik ervan: ... *on pourrait tomber quelque fois dans des erreurs manifestes.*

Poncelet's formulering van het principe is te vinden op p. xxij:

Considérons une figure quelconque, dans une position générale et en quelque sorte indéterminée, parmi toutes celles qu'elle peut prendre sans violer les lois, les conditions, la liaison qui subsistent entre les diverses parties du système; supposons que, d'après ces données, on ait trouvé une ou plusieurs relations ou propriétés, soit métriques, soit descriptives, appartenantes à la figure, en s'appuyant sur le raisonnement explicite ordinaire, c'est-à-dire par cette marche que, dans certains cas, on regarde comme seule rigoureuse. N'est-il pas évident que si, en conservant ces mêmes données, on vient à faire varier

la figure primitive par degrés insensibles, ou qu'on imprime à certaines parties de cette figure un mouvement continu d'ailleurs quelconque, n'est-il pas évident que les propriétés et les relations, trouvées pour le premier système, demeureront applicables aux états successifs de ce système, pourvu toutefois qu'on ait égard aux modifications particulières qui auront pu y survenir, comme lorsque certaines grandeurs se seront évanouies, auront changé de sens ou de signe, etc., modifications qu'il sera toujours aisé de reconnaître à priori, et par des règles sûres?

Dit principe houdt onder andere in dat uitspraken over een bepaalde figuur die snijdende lijnen bevat ook geldig blijven als die snijdende lijnen evenwijdig worden.

Dit komt neer op wat je 'de emancipatie van het oneindige' zou kunnen noemen: evenwijdige lijnen worden niet meer van snijdende onderscheiden, maar krijgen een snijpunt in het oneindige toegewezen. Overigens is het gelijkschakelen van het oneindige een noodzaak voor Poncelet: paralleliteit is immers geen projectieve invariant.

Het continuïteitsprincipe heeft ook consequenties voor de snijpunten van b.v. kegelsneden en rechten in het vlak. Een kegelsnede en een rechte die in het (reële) vlak niet snijden, krijgen *imaginaire* snijpunten toegewezen. In de analytische meetkunde is dit een betrekkelijk gering probleem: zulke snijpunten worden gerepresenteerd door complexe coördinaten. In de synthetische meetkunde van Poncelet vormen zulke punten nogal wezensvreemde elementen, omdat de middelen ontbreken ze op een bevredigende manier aan te wijzen. Later is het Von Staudt die hiervoor een verantwoorde methode vindt.

Samenvattend: Poncelet's verdiensten moet men niet zozeer zoeken in de concrete resultaten van de 'Traité', maar in zijn streven synthetische methoden te ontwikkelen, die de algemeenheid en toepasbaarheid van analytische methoden naar de kroon steken. De door Poncelet gebruikte principes werken unificerend op de verscheidenheid van meetkundige verschijnselen en hebben de mogelijkheid geboden de synthetische projectieve meetkunde als zelfstandige discipline van de wiskunde op te zetten.

De volgende wiskundige die aan de orde komt is Jakob Steiner. Daarmee stappen we heen over de periode 1820-1830, waarin diverse wiskundigen (Chasles, Gergonne, Möbius) resultaten aan de projectieve meetkunde bijdragen.

3. STEINER

Steiner (1796-1863) groeide op als boerenzoon in Utzendorf, waar hij tot zijn 19de 'het land ploegde'. Aanvankelijk door zelfstudie, later door studie aan het instituut van Pestalozzi werkt hij zich op tot leraar. Van 1818-1821 verdient hij een armzalige boterham met het geven van privé-lessen in Heidelberg, zich onderwijs bezighoudend met de studie van de Franse meetkunde.

Vanwege belangstelling die er in regeringskringen leeft voor de pedagogische ideeën van Pestalozzi en zijn goede relatie met (ex-minister) Wilhelm von Humboldt wordt Steiner aangetrokken als leraar in Berlijn. In 1834 wordt er

voor hem zelfs een buitengewoon hoogleraarschap aan de Universiteit van Berlijn gecreëerd. Een gewoon hoogleraarschap is het nooit geworden, naar het schijnt omdat hij alle goodwill in officiële kringen verspeelde door buitengewoon grof en oncontactisch gedrag. Steiner is zijn hele leven fanatiek aanhanger van Pestalozzi's ideeën geweest. Deze ideeën houden o.a. in dat de leerling zelf werkt en ontdekt, de leraar mag alleen een hint in de goede richting geven, waarbij de Socratische methode wordt gehanteerd. Steiner gebruikte bij zijn meetkundecolleges geen tekeningen, omdat de meedenkende leerling in zijn hoofd al een duidelijk beeld krijgt. Op latere leeftijd schijnt Steiner zelfs zo ver gegaan te zijn, dat hij de collegezaal verduisterde.

Van Steiner verschijnt in 1832 de *Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten voneinander*; dit werk zullen we nader bekijken.

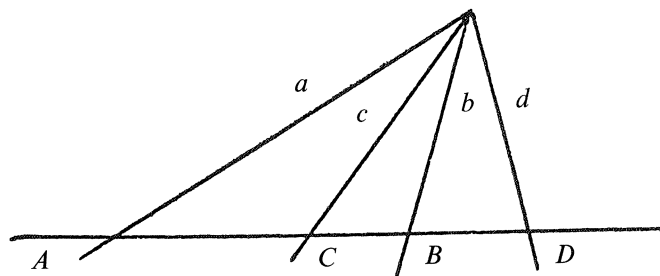
3.1. Steiner's 'Systematische Entwicklung'

In dit werk, dat uit vijf delen moest gaan bestaan, waarvan er slechts één is verschenen, tracht Steiner de betrekkelijk onsamenhangende resultaten, door diverse wiskundigen aan de projectieve meetkunde bijgedragen, systematisch te rangschikken.

Volgens Steiner zijn er een klein aantal eenvoudige grondstellingen, waaruit op systematische wijze de rest van de stellingen kan worden afgeleid. (In werkelijkheid ligt het ook bij Steiner niet zo eenvoudig.)

Karakteristieken van het werk zijn:

- * Perspectivische ligging en projectieve verwantschap spelen een fundamentele rol bij de bestudering van de relaties van z.g. 'Grundgebilde' (b.v. puntenrij op een rechte, bundel rechten, bundel vlakken etc.).
- * Dubbelverhoudingen worden in een vroeg stadium als verhouding van afstanden ingevoerd: van vier punten A, B, C, D is de dubbelverhouding: $\frac{AD}{BD} : \frac{AC}{BC}$; van vier rechten a, b, c, d is deze: $\frac{\sin(ad)}{\sin(bd)} : \frac{\sin(ac)}{\sin(bc)}$. In het geval van Figuur 8 stemmen deze overeen.



Figuur 8

- * Het dualiteitsprincipe wordt vanaf het begin gebruikt. Dit werkt door in

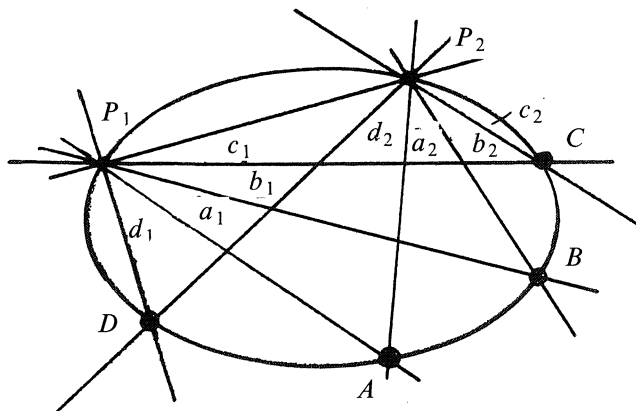
de lay-out van het boek, omdat de meeste stellingen als z.g. 'Doppelsatz' worden afgedrukt; vgl. het volgende fragment: (p. 18)

*Bei allen Geraden, welche die nämlichen vier bestimmten Strahlen (a, d, b, c) eines Strahlbüschels B schneiden, haben die drei Doppelverhältnisse, die sich aus den Abständen der jedesmaligen vier Durchschnittspunkte (a, b, b, c) von einander zusammensetzen lassen, einerlei Werthe; * nämlich diese Werthe sind jedesmal den Werthen der drei Doppelverhältnisse gleich, welche aus den Sinussen der von den vier festen Strahlen eingeschlossenen Winkel zusammengesetzt sind.*

*»Bei allen Strahlbüscheln, von welchen vier Strahlen durch die nämlichen vier bestimmten Punkte (a, b, b, c) einer Geraden A gehen, haben die drei Doppelverhältnisse, die sich aus den Sinussen der von den jedesmaligen vier Strahlen eingeschlossenen Winkel zusammensetzen lassen, einerlei Werthe; * nämlich diese Werthe sind jedesmal den Werthen der drei Doppelverhältnisse gleich, welche aus den Abständen der vier festen Punkte von einander zusammengesetzt sind.*

Uit het afgedrukte fragment blijkt dat Steiner de projectieve invariantie van de dubbelverhouding al snel vaststelt. Deze invariantie wordt verderop in het boek essentieel gebruikt bij het afleiden van eigenschappen van projectief verwante figuren.

- * Kegelsneden worden projectief gegeneerd. Als voorbeeld hiervan Figuur 9, waarin een ellips wordt gegeneerd door de snijpunten van corresponderende lijnen uit twee projectieve lijnenbundels:



Figuur 9

Belangrijk bij Steiner is zijn systematische opbouw en rangschikking van de resultaten, uitgaande van een aantal basisbegrippen en grondstellingen.

Hiermee komen we toe aan de belangrijkste figuur uit het stukje geschiedenis dat we bekijken: Karl Georg Christian von Staudt.

4. VON STAUDT

Von Staudt (1798-1868) is het type van een rustige kamergeleerde. Na het gymnasium gaat hij in 1817 naar Göttingen om bij Gauss wiskunde en astronomie te studeren. In 1822 promoveert hij in de filosofische faculteit van

Erlangen en wordt leraar wiskunde in Nürnberg. In 1835 wordt Von Staudt benoemd tot gewoon hoogleraar in de wiskunde aan de Universiteit van Erlangen en dat blijft hij tot aan zijn dood. In Erlangen houdt hij zich vooral bezig met zuivere meetkunde en vestigt een soort traditie op dit gebied, waar later Felix Klein—op dezelfde leerstoel vanaf 1872—van kan profiteren.

Het belangrijkste meetkundige werk van Von Staudt bestaat uit de in 1847 verschenen *Geometrie der Lage* en de in resp. 1856, 1857, 1860 verschenen drie ‘Hefte’: *Beiträge zur Geometrie der Lage*.

4.1. Kenmerken van de ‘Geometrie der Lage’

Over de uiterlijke kenmerken van de ‘GdL’ (evenals van de 3 ‘Beiträge’) is het volgende op te merken:

- * Het dualiteitsprincipe werkt evenals bij Steiner e.a. door in de lay-out van het werk: het geheel is over twee kolommen gedrukt en bevat dus naast een stelling ook zijn duale.
- * In het gehele werk komt *geen enkele* tekening voor.
- * Von Staudt’s taalgebruik is dor en moeilijk; van pogingen om de stof wat toegankelijk te maken valt niet veel te merken. Veelzeggend is een opmerking van Felix Klein: *Mir selbst ist die Staudtsche Darstellungsweise immer gänzlich unzugänglich gewesen.*

Degene die zich, ondanks de onaantrekkelijke eerste indruk, toch in het werk van Von Staudt verdiept, wordt hiervoor beloond met een grote rijkdom aan ideeën over de projectieve meetkunde en een zuiverheid van de methode, zoals we nog niet zijn tegengekomen.

Bij zowel Poncelet als Steiner hebben we gezien dat de—projectief invariante—dubbelverhouding werd gedefinieerd met behulp van afstanden of hoeken, d.w.z. metrische begrippen die op zich niet projectief invariant zijn. Hierin schuilt een methodische onzuiverheid, temeer daar er fundamenteel gebruik wordt gemaakt van de dubbelverhouding om de projectieve meetkunde van metrische beschouwingen te zuiveren.

Von Staudt’s eerste opzet is het omzeilen van deze methodische onzuiverheid. Hij slaagt hierin door het gebruik van een aantal andere definities van basisbegrippen dan die van zijn voorgangers. Om te zien hoe dit in zijn werk gaat, zullen we nader op de inhoud van de ‘GdL’ ingaan.

4.1.1. Von Staudt’s basisbegrippen

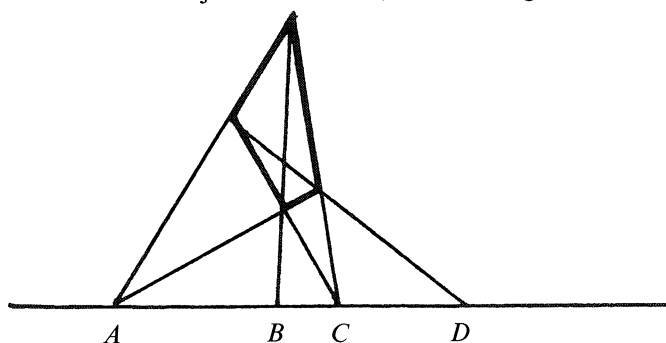
Von Staudt’s werkwijze komt er goed beschouwd op neer dat hij voor de definitie van een begrip een niet-metrische eigenschap gebruikt, die zijn voorgangers wel kenden en ook gebruikten, maar dan als afgeleide eigenschap (op grond van die oneigenlijke, metrische basis).

Het eerste begrip dat Von Staudt definieert is dat van de harmonische ligging van vier punten. Voor hem was de definitie steeds gebaseerd op een constante dubbelverhouding van de vier punten; Von Staudt’s definitie is: (in parafrase)

Gegeven drie punten A, B, C op een rechte. Construeer een vierhoek zodanig

dat een diagonaal door B gaat, het ene paar tegenoverliggende zijden elkaar snijdt in A , het andere paar in C . Dan snijdt de andere diagonaal de rechte in een punt—zeg D —dat door A, B, C bepaald wordt en dat genoemd wordt: het vierde harmonische punt bij A, B, C . ('GdL', p. 43).

Figuur 10 is de illustratie bij deze definitie (Von Staudt geeft deze niet).



Figuur 10

Iets nieuws is de combinatie harmonisch viertal-construerende vierhoek niet (sinds de Oudheid was al bekend dat er in een volledige vierhoek harmonische verhoudingen bestaan). Nieuw bij Von Staudt, naast de definitie zelf, is de belangrijke plaats die harmonische ligging in de verdere opbouw krijgt.

Harmonische ligging wordt n.l. gebruikt voor de definitie van 'projectieve verwantschap' (wat wij projectiviteit zouden noemen), het fundamentele begrip uit Von Staudt's meetkunde:

twee configuraties heten projectief verwant ($\overline{\wedge}$) als een harmonisch viertal in de ene configuratie correspondeert met een harmonisch viertal in de andere. (parafraze van artikel 103, 'GdL' p. 49/50).

Modern vertaald: een afbeelding heet een *projectiviteit* als hij harmoniceit invariant laat.

Ook dit is zo'n 'op zijn kop gezette' definitie van Von Staudt: bekend was al lang dat harmonische ligging een projectieve invariant is; nieuw is dat deze eigenschap gebruikt wordt om de basis van de projectieve meetkunde: de projectiviteit, te definiëren.

Voor de rest van ons verhaal is nog van belang: het begrip *involutie* bij Von Staudt. Als twee configuraties van punten op dezelfde rechte 'in elkaar liggen' en zodanig projectief verwant zijn, dat als A in de ene configuratie correspondeert met A_1 in de andere, dat dan ook A_1 in de ene configuratie correspondeert met A in de andere, dan liggen de configuraties involutorisch. In zo'n geval spreekt Von Staudt van één involutorische configuratie of involutie; notatie: $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 \cdot \dots$ (A, B, C corresponderen met resp. A_1, B_1, C_1).

Aan de basis van Von Staudt's projectieve meetkunde staat ook de

fundamentealstelling van de projectieve meetkunde.

4.1.2. Von Staudt's versie van de fundamentealstelling

De fundamentealstelling van de projectieve meetkunde (die uitspreekt dat een projectiviteit bepaald is door de beelden van drie punten) komt bij Von Staudt vrijwel onmiddellijk na zijn invoering van projectieve verwantschap:

als twee projectief verwante configuraties drie met elkaar corresponderende elementen gemeen hebben, dan hebben ze alle elementen gemeenschappelijk.
(art. 106, 'GdL' p. 50/51).

Von Staudt geeft een bewijs hiervan voor twee projectief verwante configuraties van punten op dezelfde rechte, gebaseerd op de uniciteit van het vierde harmonische punt bij drie gegeven punten. Vanwege deze uniciteit is het duidelijk dat, als de beide—projectief verwante—configuraties drie corresponderende elementen A, B, C gemeen hebben, ze dan nog minstens één punt D (de 4de harmonische bij A, B, C) gemeen hebben, omdat harmoniciteit in de beide configuraties per definitie overeenkomt. Maar dan is b.v. ook E , het 4de harmonische punt bij B, D, A , een gemeenschappelijk punt en zo kan men bij drie gegeven vaste punten steeds een nieuw gemeenschappelijk punt vinden, via de constructie van de vierde harmonische. Von Staudt veronderstelt impliciet in zijn bewijs van de stelling, dat men op deze manier alle punten van de rechte krijgt; dit is echter niet zonder meer zo: op b.v. een reële getallenrechte krijgt men op deze manier alleen de rationale punten. Alleen met bepaalde continuïteitsaannames kan men via deze middelen de stelling bewijzen; we zullen hier echter niet verder op ingaan.

Behalve Von Staudt's z.g. 'worpenrekening', zullen we hier zijn behandeling van de verdere projectieve meetkunde terzijde laten, omdat tijd en ruimte hiervoor ontbreken. Met de worpenrekening geeft Von Staudt een methode aan volgens welke het getal weer een plaats in de meetkunde kan krijgen, zij het dan dat de introductie van het getal zuiver meetkundig is en zijn plaats gebonden aan de eisen die volgen uit de meetkundige structuur.

4.2. De worpenrekening bij Von Staudt

Hoewel het begrip al wordt ingevoerd aan het begin van de eerste 'Beiträge' (p. 15/16), vinden we de worpenrekening pas in de tweede (vanaf p. 166). Het volgende is slechts een parafrase van Von Staudt's worpenrekening, niet een nauwgezette weergave:

Een *worp* is een geordend viertal punten A, B, C, D op een rechte; notatie: $ABCD$. In het volgende vatten we 'worp' iets ruimer op, n.l. als een *klasse* van projectief equivalente quadrupels. (Projectief equivalent houdt hier in, dat $ABCD$ en $EFGH$ equivalent zijn als de configuraties waartoe ze behoren projectief verwant zijn, zó dat A met E , B met F , C met G , D met H correspondeert.)

Naast de gewone worpen, waarbij de vier punten verschillend zijn, onderscheiden we nog een drietal soorten 'oneigenlijke' worpen:

- worpen van de vorm $abca$ of $baac$, ook te noemen: 0
- worpen van de vorm $abcb$ of $babc$, ook te noemen: 1
- worpen van de vorm $abcc$ of $ccab$, ook te noemen: ∞ .

OPMERKING 1. Het waarom van de laatste aanduiding zal zo meteen duidelijk worden.

OPMERKING 2. De fundamentealstelling spreekt uit dat een projectiviteit uniek is bepaald door de beelden van 3 punten. Dit houdt o.a. in, dat de 16 mogelijke worpen die men van vier verschillende punten A, B, C, D kan maken steeds vier aan vier gelijk zijn ('gelijk' is hier: projectief equivalent), b.v.: $ABCD = BADC = CDAB = DCBA$. In analogie met b.v. $ABCD = BADC$ worden de oneigenlijke worpen $abca$ en $baac$ met elkaar geïdentificeerd.

Het is mogelijk om op de verzameling van worpen een optelling en een vermenigvuldiging te definiëren.

4.2.1. Optelling van worpen

Zij gegeven:

3 willekeurige punten A, B, C op een rechte, en

2 worpen: U en U_1 .

Wegens de fundamentealstelling zijn hiermee 3 punten D, D_1 en S op de rechte bepaald, zodanig dat:

$$ABCD = U$$

$$ABCD_1 = U_1$$

en: in de involutie $CC \cdot DD_1 \cdot \dots$ zijn A en S elkaars toegevoegde elementen.

We definiëren nu: de worp $ABCS$ is de som van de worpen U en U_1 ofwel: $ABCS = U + U_1$

De eigenschappen van deze optelling volgen vrijwel onmiddellijk uit de definitie, o.a.:

- * De optelling is commutatief, want $U + U_1 = U_1 + U$, omdat $CC \cdot DD_1 \cdot \dots$ dezelfde involutie is als $CC \cdot D_1 D \cdot \dots$.
- * Er is een worp die fungeert als neutraal element voor de optelling: als $D = A$, dan is $S = D_1$, dus $ABCA + ABCD_1 = ABCD_1$. De oneigenlijke worp $ABCA$ is dus de 'nul' in deze optelling; dit verklaart de benaming die we hierboven hebben gegeven.
- * Twee worpen met som 0 heten elkaars tegengestelde. Met nogal wat extra werk vindt men: elke worp heeft een tegengestelde (Bz. 'GdL' 2, p. 166 e.v.).

4.2.2. Vermenigvuldiging van worpen

Zij gegeven:

3 willekeurige punten M, A, N op een rechte, en

2 worpen: U en U_1 die niet 0 of ∞ zijn.

Hiermee zijn 2 punten A_1 en A_2 van de rechte bepaald, zodanig dat:

$$MANA_1 = U$$

$$MA_1NA_2 = U_1.$$

Dan is ook de worp $MANA_2$ bepaald en we definiëren: de worp $MANA_2$ is het *produkt* van U en U_1 ofwel: $MANA_2 = MANA_1 \cdot MA_1NA_2 = UU_1$.

Ook hier volgen de eigenschappen van de vermenigvuldiging vrij snel uit de definitie:

- * Bij gegeven worpen hangt het produkt niet af van de keuze van de punten op de rechte.
- * De vermenigvuldiging is commutatief: zoals we hierboven in Opmerking 2 hebben gezien, zijn alle mogelijke worpen van 4 punten steeds 4 aan 4 gelijk. Zo geldt met name:

$$MA_1NA_2 = NA_2MA_1 = U_1$$

$$MANA_1 = NA_1MA = U,$$

dus

$$U_1U = NA_2MA_1 \cdot NA_1MA = NA_2MA = MANA_2 = UU_1.$$

- * De oneigenlijke worp $MANA$ fungeert als neutraal element t.a.v. de vermenigvuldiging: $MANA \cdot MANA_1 = MANA_1$; dit verklaart de benaming: $MANA = 1$.
- * Twee worpen met produkt 1 heten elkaars *inverse*. Elke worp heeft een inverse, immers: $MANA_1 \cdot MA_1NA = MANA = 1$.

Voor het verband van optelling en vermenigvuldiging geldt:

- * De distributieve wetten gelden, b.v.: $U(V+V_1) = UV+UV_1$. Zij n.l. $U = ABCD$; $V = ADCE$ en $V_1 = ADCE_1$, dan: $UV = ABCE$ en $UV_1 = ABCE_1$. Beschouw nu de involutie $CC \cdot EE_1 \dots$. Veronderstel dat in deze involutie aan A P wordt toegevoegd, dan geldt: $V+V_1 = ADCP$. Dan: $UV+UV_1 = ABCEP = ABCD \cdot ADCP = U(V+V_1)$. Evenzo voor de andere distributieve eigenschap.

De belangrijkste eigenschappen van de optelling en vermenigvuldiging hebben we hierboven al aangeduid. Von Staudt zelf gaat na dat voldaan is aan alle eigenschappen van de bewerkingen op een lichaam (hij noemt dit woord niet, maar somt netjes alle eisen op).

In een aanhangsel bij de tweede 'Beiträge' gebruikt Von Staudt de worpen om zijn meetkunde te coördinatiseren. Omdat hierbij lengtes van lijnstukken worden gebruikt moet dit volgens Von Staudt inderdaad slechts als een appendix bij het werkelijke werk worden beschouwd.

4.3. Von Staudt's coördinatisering

Allereerst wordt aan elke worp $abcd$ een getal toegekend, zijn waarde, en wel als volgt:

Zij C het oneigenlijke punt van een rechte, A en B twee eigenlijke punten.

Bepaal het punt D zó dat $ABCD \wedge abcd$.

We noemen dan het quotiënt (van lengtes) $\frac{AD}{AB}$ de waarde van $abcd$ (en

$ABCD$), waarbij we nog letten op het teken (positief als AD en AB in dezelfde oriëntatie liggen, anders negatief).

Als nu A, B, C, D vier eigenlijke punten van een rechte zijn, dan gaat men gemakkelijk na dat de waarde van de worp $ABCD = \frac{AD}{AB} \cdot \frac{CB}{CD}$.

Een projectieve coördinaat op de rechte voert Von Staudt als volgt in: Kies op een rechte 3 punten A, B, C . Noem de ‘abscis’ van A : 0, van B : 1 en van C : ∞ . De coördinaat van een vierde punt P definiëren we dan als gelijk aan de waarde van de worp $ABCP$. Hiermee bepalen A, B, C een projectief coördinatensysteem op de rechte, dat geheel overeenkomt met dat systeem dat Von Staudt’s voorgangers invoerden met behulp van dubbelverhoudingen van afstanden. Anderzijds is de zuiver meetkundige introductie van de coördinatenverzameling met zijn bewerkingen geheel gelijkwaardig met de moderne wijze van coördinatiseren.

4.4. Von Staudt’s verdiensten voor de meetkunde

We hebben gezien dat Von Staudt erin slaagt de projectieve meetkunde strikt niet-metrisch op te bouwen; hiermee onderscheidt hij zich van zijn voorgangers. Het middel dat hij gebruikt (de ‘omgekeerde’ definitie) doet verrassend modern aan, omdat het past in de huidige traditie van ‘vrijheid van definitie’.

Ongeveer hetzelfde zien we aan Von Staudt’s imaginairetheorie, waarover we tot nog toe hebben gezwegen. Poncelet had imaginaire snijpunten van rechten en kegelsneden geïntroduceerd, zonder dat hij de middelen had, ze concreet ‘aan te wijzen’, resp. geconjungeerde elementen te scheiden (behalve dan met analytisch-meetkundige middelen).

In het voorwoord van de eerste ‘Beiträge’ vraagt Von Staudt zich dan ook af: *Wo ist, fragt sich wohl Jeder, der imaginäre Punkt, wenn man vom Coordinatensysteme abstrahirt?* Het lukt Von Staudt imaginaire op geheel meetkundige wijze in te voeren en ook de geconjungeerde elementen te scheiden. Hij doet dit door imaginaire punten in te voeren als de vaste punten van een elliptische involutie (d.i. een involutie die geen reële vaste punten heeft). Door op een rechte twee oriëntaties te onderscheiden, kan hij ook de geconjungeerde elementen scheiden.

In het hele werk van Von Staudt zien we een diepgaande bezinning op de onderliggende principes van de projectieve meetkunde en daarmee samenhangend een groot besef over de zuiverheid en strengheid van de methode. De hierbij opduikende problemen weet Von Staudt op creatieve wijze te omzeilen.

5. BESLUIT

Aangezien onze inleiding al zeer uitgebreid was, kunnen we tot besluit kort zijn. Met de synthetische methoden, die gedeeltelijk door zijn voorgangers, gedeeltelijk door hem zelf werden ontwikkeld, was Von Staudt in staat om—zonder getallen—de projectieve meetkunde op te zetten. Daarmee geeft hij impliciet een antwoord op onze eerste vraag uit de inleiding: wat blijft er van

de meetkunde over als we afzien van het gebruik van getallen?

Het meest spectaculair voor de moderne lezer is de worpenrekening bij Von Staudt. Hierin wordt immers op een meetkundige wijze een coördinatenverzameling mét bewerkingen ingevoerd, zodanig, dat het verband van de meetkundige eigenschappen en de algebraïsche duidelijk wordt. Dit lijkt geheel overeen te komen met de moderne aanpak zoals die door ons in 1.2 werd beschreven; ziedaar de wortels van het moderne onderzoek! Toch is dit niet een geheel juiste voorstelling van zaken: Von Staudt's motieven en uitgangspunten zijn immers verschillend van de moderne. Hij bestudeert de meetkunde die wordt opgelegd door de werkelijkheid, zodat alleen deze ene meetkunde mogelijk is. De coördinatisering wordt alleen in een appendix behandeld en moet volgens Von Staudt nadrukkelijk als zodanig worden beschouwd: in de rest van het werk doet hij er ook niets mee. Het lijkt erop dat Von Staudt alleen maar coördinatiseert om te laten zien dat zijn meetkunde dezelfde is als die van zijn voorgangers. Dit is nodig omdat hij zich baseert op een aantal andere uitgangspunten. Wat overeind blijft is natuurlijk de techniek van Von Staudt's coördinatisering zelf. De coördinatisering van b.v. Hilbert (de 'Streckenrechnung') gaat waarschijnlijk rechtstreeks terug op die van Von Staudt, evenals de methodes van Hilbert's tijdgenoten, zoals Hessenberg en Veblen & Young. De belangrijkste bijdrage van Von Staudt en zijn voorgangers lijkt echter het inzicht dat zuiverheid en strengheid van de methode, waarbij alle wezensvreemde elementen zijn verwijderd, moeten worden nagestreefd. Dit is de voedingsbodem geweest voor de huidige aanpak van de meetkunde, waarin zelfs geen plaats meer is voor uit de werkelijkheid geputte grondregels, doch slechts voor 'conventionele' axioma's.

De hier besproken wiskundigen krijgen nog meer reliëf als men bedenkt dat zij nog niet door de hedendaagse axiomatische wol waren geverfd.

6. LITERATUUR

J.V. PONCELET, *Traité des propriétés projectives des figures*, Parijs, 1822.

J. STEINER, *Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander*, Oorspronkelijk 1832.

Gebruikte uitgave: Ostwald's Klassiker der exacten Wissenschaften, Nr. 82. Ook in: *Gesammelte Werke*, Berlijn, 1881, 1882 (2 delen), deel I, p. 229-460.

K.G.C. VON STAUDT, *Geometrie der Lage*, 1847.

K.G.C. VON STAUDT, *Beiträge zur Geometrie der Lage* (3 Hefte) 1856,57,60 (alle uitgegeven te Nürnberg, Bauer & Raspe).

Secondaire literatuur: De in dit stuk beschreven ontwikkelingen vindt men ook behandeld in:

M. KLINE, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, hoofdstuk 35.

F. KLEIN, *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, 1926 (2 delen), deel I, hfdst. 2 t/m 4.

H. FREUDENTHAL, *The Impact of Von Staudt's Foundations of Geometry*, in: For Dirk Struik (ed. Cohen et al.), Dordrecht (Reidel), 1974, p. 189-200.

Het moderne onderzoek aangaande het verband van meetkundige en algebraïsche eigenschappen heeft belangrijke impulsen ontvangen van:

D. HILBERT, *Grundlagen der Geometrie*, eerste druk, Leipzig 1899, elfde druk, Stuttgart, 1972.

Dit boek bevat naast algemene axiomatische onderzoeken ook coördinatiseringsmethoden, waarbij de coördinatenverzameling uit de meetkunde zelf wordt geconstrueerd (m.b.v. lijnstukken) en waarbij de bewerkingen meetkundig worden ingevoerd. Het in 1.1.2 behandelde voorbeeld stamt in feite uit Hilbert's Grundlagen;

en ook van:

M. HALL, *Projective Planes*, Transactions American Mathematical Society, **54** (1943), p. 229-277.

Met dit artikel begint het werkelijk moderne onderzoek. Het artikel is enerzijds geïnspireerd door Hilbert's Grundlagen (en hierop gebaseerde verdere onderzoeken van R. Moufang), anderzijds door combinatorische onderzoeken.

Een goede, moderne tekst over de mathematische aspecten van dit onderzoek is:

D.R. HUGHES & F.C. PIPER, *Projective Planes*, New York etc., 1973.

Algebraïsche Meetkunde

J.H.M. Steenbrink

Voordracht van de vakantiecursus uit 1978

1. INLEIDING

Algebraïsche meetkunde gaat over stelsels polynoomvergelijkingen en hun oplossingsverzamelingen. Dit zeer algemene gezichtspunt maakt de algebraïsch meetkundige tot een bemoeial. Waar het hem uitkomt houdt hij zich bezig met lineaire algebra, projectieve meetkunde, getaltheorie en zelfs functietheorie en differentiaalvergelijkingen. De basistechniek waarover hij beschikt, is de commutatieve algebra: de theorie der commutatieve ringen met eenheidselement en hun idealen, modulen etc. Omdat lang niet iedere wiskundige met dit vak kennis heeft gemaakt, is het niet eenvoudig een inleiding te geven in de algebraïsche meetkunde. Daarom wil ik me beperken tot de behandeling van enkele voorbeelden, waarin het samenspel van algebra, meetkunde, getaltheorie en topologie zichtbaar wordt.

2. POLYNOOMVERGELIJKINGEN

U bent waarschijnlijk allen bekend met de theorie der lineaire vergelijkingen. Men kan hun oplossingen meetkundig voorstellen als deelruimten van de n -dimensionale Euclidische ruimte, door daarin een basis te kiezen en aan de punten coördinaten toe te kennen. Ook kent U vergelijkingen van meetkundige figuren als bol, cirkel, ellips, hyperbool. Een polynoom is een eindige som

$$f = \sum_{i_1, \dots, i_n \geq 0} a_{i_1, \dots, i_n} X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n},$$

waar a_{i_1, \dots, i_n} de coëfficiënten van f en X_1, \dots, X_n de variabelen heten. We nemen de coëfficiënten uit een ring A met eenheidselement waarin optelling en vermenigvuldiging aan de gebruikelijke commutatieve, associatieve en distributieve wetten voldoen. We tellen polynomen op de voor de hand liggende wijze op en vermenigvuldigen ze; hierdoor vormen de polynomen met coëfficiënten uit A in variabelen X_1, \dots, X_n een commutatieve ring die we noteren met $A[X_1, \dots, X_n]$. We zullen ons voornamelijk bezighouden met de ringen der gehele, rationale, reële en complexe getallen.

Gegeven een stelsel polynoomvergelijkingen met coëfficiënten uit A kunnen we voor iedere ring B die A bevat spreken van de oplossingen van het stelsel met coördinaten in B : de verzameling van alle n -tallen (b_1, \dots, b_n) met $b_i \in B$ en $f(b_1, \dots, b_n) = 0$ voor elke f uit het stelsel. Zo vormen de reële oplossingen van de vergelijking $X^2 + Y^2 = 1$ een cirkel; de rationale oplossingen kan men

voorstellen als paren $(p/r, q/r)$, waar p , q en r gehele getallen zijn met grootst gemene deler 1 en $r > 0$; op deze wijze krijgt men precies de drietallen van Pythagoras, immers $p^2 + q^2 = r^2$. In paragraaf 5 zal blijken hoe men met meetkundige methoden deze drietallen bepalen kan.

PROBLEEM. Hoe ziet de verzameling der complexe oplossingen van $X^2 + Y^2 = 1$ eruit?

3. DUALE GETALLEN EN RAAKVECTOREN

We gaan zien dat men een raakvector aan een vlakke kromme met vergelijking $f(X, Y) = 0$ kan beschouwen als een oplossing van die vergelijking in een zekere ring: de ring der *duale getallen*. Deze kan men voorstellen als $a + b\epsilon$ waar a en b reële getallen zijn, met de volgende optelling en vermenigvuldiging:

$$(a + b\epsilon) + (c + d\epsilon) = (a + c) + (b + d)\epsilon;$$

$$(a + b\epsilon) \cdot (c + d\epsilon) = ac + (ad + bc)\epsilon.$$

We hebben dus een nieuw 'getal' ϵ ingevoerd met $\epsilon^2 = 0$. Beschouw de parabool C met vergelijking $Y = X^2$. De vergelijking voor de raaklijn aan C in het punt (t, t^2) is

$$Y + t^2 = 2tX,$$

dus een raakvector in dit punt is van de vorm $(u, 2tu)$. Het paar duale getallen $(t + u\epsilon, t^2 + 2tu\epsilon)$ is een nulpunt van $Y - X^2$. Omgekeerd kan men iedere oplossing van $Y = X^2$ met coördinaten in de ring der duale getallen interpreteren als een raakvector aan C . Algemeen kan men zonder veel moeite bewijzen: het paar $(a + b\epsilon, c + d\epsilon)$ van duale getallen is een oplossing van de vergelijking $f(X, Y) = 0$ dan en slechts dan als geldt:

$$f(a, c) = 0;$$

$$f_x'(a, c)b + f_y'(a, c)d = 0.$$

Men ziet dat de vergelijking $X = 0$ en $X^2 = 0$ in de duale getallen verschillende oplossingsverzamelingen hebben: de ene is het punt 0, de andere bestaat uit alle getallen van de vorm $b\epsilon$ en kan worden geïnterpreteerd als een punt met een rechte van raakvectoren erdoor.

4. EQUIVALENTIE VAN STELSLS VERGELIJKINGEN

We zouden 2 stelsels vergelijkingen equivalent willen noemen, als hun oplossingsverzamelingen dezelfde zijn. Hierbij is van belang ook oplossingen te beschouwen met coördinaten in een ring die de coëfficiëntenring bevat. De stelsels $0 = 1$ en $X^2 + 1 = 0$ hebben wel dezelfde reële oplossingen, maar de eerste vergelijking heeft geen complexe oplossingen, terwijl de tweede de oplossingen i en $-i$ heeft.

We noemen dus twee stelsels vergelijkingen $f_1 = \dots = f_r = 0$ en $g_1 = \dots = g_s = 0$ met $f_i, g_j \in A[X_1, \dots, X_n]$ equivalent, indien bestaan polynomen $h_{ij}, k_{ji} \in A[X_1, \dots, X_n]$, $i = 1, \dots, r$ en $j = 1, \dots, s$ met

$$f_i = \sum_{j=1}^s h_{ij} g_j;$$

$$g_j = \sum_{i=1}^r k_{ji} f_i.$$

Dit betekent dat f_1, \dots, f_r en g_1, \dots, g_s in $A[X_1, \dots, X_n]$ hetzelfde *ideaal* voortbrengen. Zo ontstaat een eenduidig verband tussen stelsels vergelijkingen in n variabelen met coëfficiënten in A en idealen in de polynoomring over A . Hier ligt het verband met de commutatieve algebra.

5. VLAKKE KROMMEN

De (oplossingsverzamelingen van) vergelijkingen in 2 variabelen noemen we *vlakke krommen*. We beschouwen eerst de kromme met vergelijking $X^2 + Y^2 = 1$. De oplossingsverzameling kan men parametriseren via de afbeelding $t \rightsquigarrow (\cos t, \sin t)$. Deze parametrisering heeft voor ons het nadeel dat hij weliswaar de reële oplossingen levert, maar niet bijvoorbeeld de oplossingen met rationale coördinaten. Dit berust op het feit dat de cosinus en de sinus transcendente functies zijn: het rationaal zijn van t zegt nog niets over de rationaliteit van $\cos t$ of $\sin t$. Er bestaat echter een andere parametrisering die in dit opzicht beter voldoet en die we krijgen door stereografische projectie van de cirkel vanuit het punt $(0, -1)$ op de X -as:

$$X(t) = \frac{2t}{1+t^2}, \quad Y(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Er geldt: $t = X(t)(Y(t)+1)^{-1}$ dus t is rationaal dan en slechts dan als $X(t)$ en $Y(t)$ rationaal zijn (mits $Y(t) \neq -1$). Derhalve zijn de rationale punten van de cirkel van de vorm

$$X\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{2mn}{m^2+n^2}, \quad Y\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{n^2-m^2}{n^2+m^2}.$$

Hieruit leidt men af dat de Pythagoreïsche drietallen zijn:

$$(2mn, n^2 - m^2, n^2 + m^2).$$

OPGAVE. Vind alle rationale oplossingen van de vergelijking $Y^2 = X^2 + X^3$. Aanwijzing: laat $t = Y/X$ de kromme parametriseren. Zou men zo ook de kromme $X^3 + Y^3 + 1$ aan kunnen pakken? (Denk aan de laatste stelling van Fermat.) Maak een schets van beide krommen. Wat is het verschil?

OPGAVE. Bereken: $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$.

6. RATIONALE VLAKKE KROMMEN

In de vorige paragraaf hebben we het belang gezien van een parametrisering van een kromme met rationale functies; dit zijn functies die te schrijven zijn als het quotiënt van polynomen. Een kromme die een parametrisering met rationale functies toelaat, noemen we een *rationale kromme*. De constructie

met behulp van stereografische projectie toont aan dat iedere niet-ontaarde kegelsnede een rationale kromme is. Andere voorbeelden van rationale krommen:

$$X^a = Y^b \text{ (ggd}(a,b) = 1).$$

$$f(X,Y) = g(X,Y), \text{ met } f,g \text{ homogeen van graad } n-1 \text{ resp. } n \\ \text{en zonder gemeenschappelijke factor.}$$

We gaan op twee manieren aantonen dat de Fermat-kromme $X^3 + Y^3 + 1 = 0$ niet rationaal is.

In het eerste bewijs volgen we SHAFAREVICH, pag. 7. Stel dat we een parametrisering hebben van de vorm

$$X = p/r, Y = q/r,$$

met p, q en r polynomen in t en onderling ondeelbaar. Dan voldoen p, q en r aan $p^3 + q^3 + r^3 = 0$. Nemen we de afgeleide naar t en delen we door 3, dan krijgen we de relatie:

$$p'p^2 + q'q^2 + r'r^2 = 0.$$

We zien dus dat het drietal (p^2, q^2, r^2) een oplossing is van het homogene stelsel lineaire vergelijkingen

$$pX + qY + rZ = 0$$

$$p'X + q'Y + r'Z = 0.$$

Hieruit leiden we een tegenspraak af. Neem aan dat geldt:

$$\deg(p) \geq \deg(q) \geq \deg(r).$$

Door bovenstaand stelsel op te lossen met de regel van Cramer, zien we dat er een rationale functie f van t bestaat met

$$p^2f = \begin{vmatrix} q & r \\ q' & r' \end{vmatrix}, \quad q^2f = \begin{vmatrix} r & p \\ r' & p' \end{vmatrix} \text{ en } r^2f = \begin{vmatrix} p & q \\ p' & q' \end{vmatrix}.$$

Merk op dat q/r niet constant is, dus $q'r \neq qr'$. Indien $f = t/n$ met t en n onderling ondeelbaar, dan $n|p^2$ en tevens $n|r^2, q^2$. Omdat p, q en r geen factor gemeenschappelijk hebben, is n constant, dus f is een polynoom. Dan geldt echter

$$2 \deg(p) \leq \deg(p^2f) = 2 \deg(p) + \deg(f) = \deg(qr' - q'r) \\ \leq \deg(q) = \deg(r) - 1 \leq 2 \deg(p) - 1: \text{ tegenspraak.}$$

Dit bewijs is zonder moeite te generaliseren tot het geval van de krommen $X^n + Y^n + 1 = 0$ ($n \geq 3$).

We geven nu een topologisch bewijs van de stelling, dat de Fermat-kromme niet rationaal is. Hiertoe beschouwen we de complexe oplossingen van

$X^3 + Y^3 + 1 = 0$ niet slechts in het affiene vlak \mathbb{C}^2 maar in het complexe projectieve vlak $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. De topologische structuur van een rechte in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ is uiteraard die van de complexe projectieve rechte, d.w.z. de Riemann-sfeer. Ook bij krommen van hogere graad zal de complexe oplossingsverzameling een oppervlak (in de zin van reëel 2-dimensionaal) zijn. Omdat het projectieve vlak compact is, is ook ieder gesloten deel ervan compact. De afsluiting van de Fermat-kromme in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ is dus een compact oppervlak. Stellen we punten van $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ voor als drietallen (x, y, z) van complexe getallen, niet alle nul, modulo gemeenschappelijke factoren, dan bestaat deze afsluiting uit de drietallen (x, y, z) met $x^3 + y^3 + z^3 = 0$. Projecteer nu deze kromme vanuit het punt $(1, -1, 0)$ op de rechte $X = 0$. Het volledig origineel van een punt $(0, y, z)$ op deze as vinden we door dit punt te verbinden met het projectiecentrum en deze rechte te snijden met de kromme. We vinden voor de rechte de vergelijking $z(X + Y) = yZ$ en deze snijdt buiten het projectiecentrum de kromme nog in twee punten, tenzij $y(2y^3 - 4z^3) = 0$: we vinden dan slechts één origineel. De vier punten die we zo krijgen, noemen we de vertakkingspunten van de projectie. We noemen ze P_1, \dots, P_4 en hun beeldpunten zijn Q_1, \dots, Q_4 . Om een topologisch model van onze kromme te krijgen, nemen we nu 2 kopieën van de Riemann-sfeer en maken in beide coupures langs de intervallen Q_1Q_2 en Q_3Q_4 . Vervolgens plakken we beide cylinders aan elkaar langs de coupures, waarbij we ervoor zorgen dat we verschillende zijden van de coupures van verschillende kopieën identificeren. We krijgen dan een torus en deze bezit een 2 op 1 afbeelding op de sfeer met vertakkingspunten P_1, \dots, P_4 : de punten waar de punten Q_i van beide bladen geïdentificeerd zijn. Stel nu dat $X = p/r$, $Y = q/r$ een parametrisering van de Fermat-kromme geeft. Dan is de parametrisering voortzetbaar tot een afbeelding van de Riemann-sfeer naar $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ via

$$t \rightsquigarrow (p(t), q(t), r(t)),$$

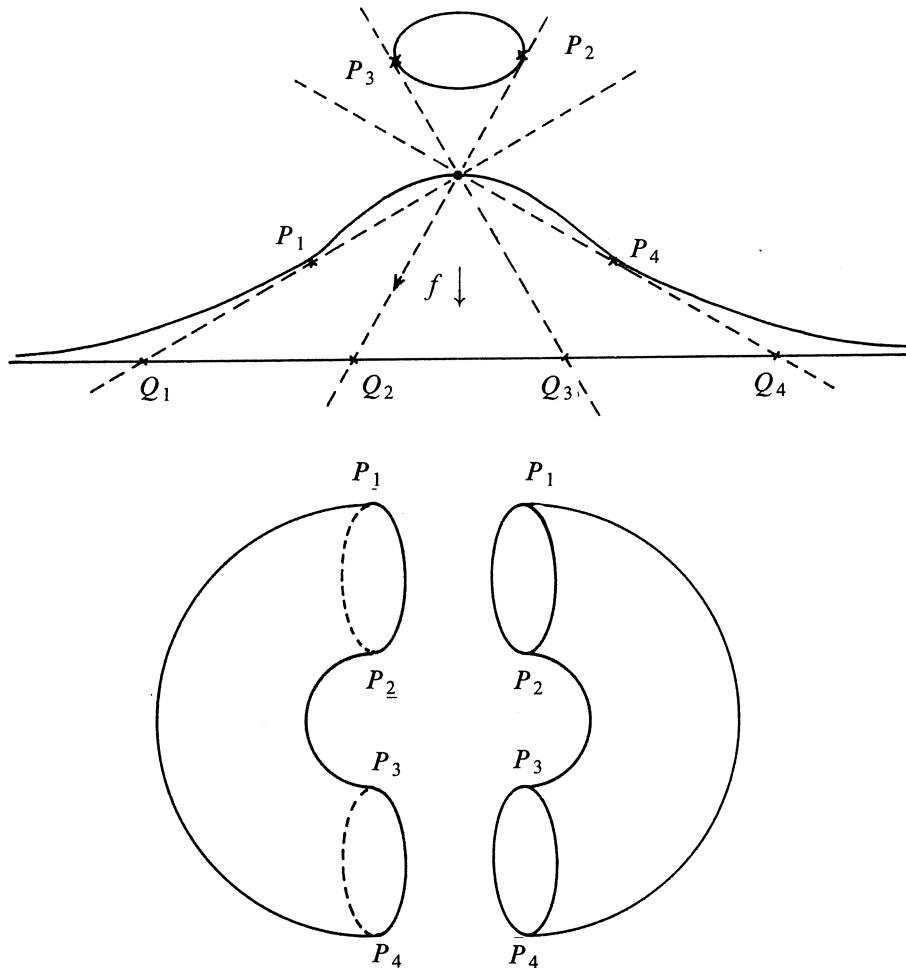
die één-éénduidig is op eindig vele uitzonderingen na. Noem deze afbeelding f . Dan is f een continue afbeelding van de 2-sfeer op de torus, bijna overal 1-1. We tonen aan dat dit niet kan. Kies daartoe een cirkel op de torus die niet samentrekbaar is en zodanig dat boven ieder punt precies één punt van de sfeer ligt. Het origineel van onze cirkel is dan een gesloten kromme op de 2-sfeer, derhalve samentrekbaar. Met deze kromme is dan ook de beeldkromme samentrekbaar omdat f continu is. Dit is een tegenspraak.

7. SINGULARITEITEN

We beschouwen de familie van vlakke projectieve krommen

$$C_t: Y^2 = X(X+1)(X-t) \quad \text{voor } t \in \mathbb{C}.$$

Zij R het oneigenlijke punt van deze krommen, dus $R = (0, 1, 0)$. Zij f_t de projectie van C_t vanuit R op de X -as. De vertakkingspunten van f_t zijn $(0, 0)$, $(-1, 0)$, $(t, 0)$ en R . Dit ziet men door te bedenken dat $f_t(x, y) = (x, 0)$.



Als $t = 1$ zijn er vier verschillende vertakkingspunten; de kromme C_t is topologisch een torus.

Als $t = 0$ is $C_t = C_0$ de kromme uit opgave 1 van paragraaf 5; daar bleek dat C_0 rationaal is, i.h.b. geen torus.

We gaan eens na wat er met de topologie gebeurt als t van 1 naar 0 gaat. In de constructie van paragraaf 6 betekent dit, dat de vertakkingspunten P_1 en P_2 steeds dichterbij elkaar komen en tenslotte samenvallen tot één punt P . In plaats van twee coupures aan te brengen op onze twee kopieën van de Riemann-sfeer kunnen we volstaan met één coupure, mits we de punten P van beide kopieën identificeren. Dit punt correspondeert met het *singuliere punt* $(0,0)$ van C_0 . Topologisch is C_0 dus geen torus, maar een rookworst. Het is nu duidelijk dat er geen beletsel meer is om de sfeer op C_0 af te beelden: we hoeven slechts twee punten te identificeren.

Omdat in $(0,0)$ twee takken van C_0 samenkomen met verschillende raakrichtingen, spreken we van een *gewoon dubbelpunt*. We zeggen dat de familie

$(C_t)_{t \in \mathbb{C}}$ ontgaardt voor $t=0$. Andere ontgaardingswaarden van t zijn -1 en ∞ . Andere ontgaardende families zijn:

$$Y^2 = X(X^2 - t^2) \text{ bij } t = 0; \quad XY(X - Y) = t(X^3 + Y^3 + 1).$$

De ontgaarde exemplaren zijn: een kubische kromme met een keerpunt en drie rechten door één punt.

Is C een vlakke kromme met vergelijking $f(x,y) = 0$ dan vindt men de singuliere punten van C als oplossingen van de vergelijkingen $f(x,y) = f'_x(x,y) = f'_y(x,y) = 0$.

Is C een vlakke kromme zonder singuliere punten, dan heeft C een topologisch model dat er uitziet als een bol met een aantal hengsels eraan. Dit aantal heet het geslacht van de kromme. Als C een kromme van graad $d > 0$ is, heeft C geslacht $g = (d-1)(d-2)/2$. Een kromme van geslacht 0 is dus topologisch een sfeer.

We beschouwen nu het geval van een vlakke kromme van graad d die singuliere punten kan hebben, maar niet in verschillende componenten uiteenvalt. Dit betekent dat C door een irreducibele d -de graadsvergelijking wordt gedefinieerd. Men kan nu de volgende feiten bewijzen:

- a) er bestaat een kromme C' , niet noodzakelijk vlak, zo dat C verkregen wordt door identificatie van eindig veel punten van C' in eindig veel punten van C ;
- b) voor ieder type singulier punt is een getal δ_p gedefinieerd zodanig dat de formule geldt:

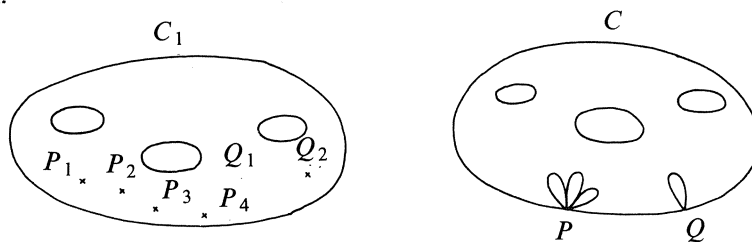
$$\text{geslacht van } C' = (d-1)(d-2)/2 - \sum_p \delta_p,$$

waarbij gesommeerd wordt over de singuliere punten van C ;

voor een gewoon dubbelpunt P geldt $\delta_p = 1$, evenals voor een keerpunt van de eerste soort;

- c) C is een rationale kromme waarvan C' geslacht 0 heeft.

Een irreducibele d -de graads kromme met $(d-1)(d-2)/2$ gewone dubbelpunten is dus rationaal en meer dubbelpunten kan zo'n kromme niet bezitten.



Bovenstaande figuur schetst de situatie voor een 5de graadskromme C met één gewoon dubbelpunt en één gewoon 4-voudig punt (4 takken van C snijden elkaar met verschillende raaklijnen; $\delta_p = 6$). C' heeft geslacht $3 = 10 - (1 + 6)$. Een gedetailleerde studie van de topologie van complexe algebraïsche krommen vindt men in het boek van KENDIG (zie literatuurlijst).

8. EPILOOG

We hebben in het voorgaande kunnen constateren, dat verschillende takken van wiskunde een rol spelen bij de aanpak van problemen uit de algebraïsche meetkunde. De algebraïsch-meetkundige onderzoeker kan zich derhalve geen houding veroorloven in de trant van 'dat is analyse, dus mijn terrein niet', maar moet zich bedienen van alle ter beschikking staande methoden die voor de oplossing van zijn probleem van belang kunnen zijn. Het valt te betreuren dat de wiskunde op zovele leerlingen en studenten overkomt als een vergaarbak van min of meer van elkaar losstaande theorieën, gekenmerkt door een onduidelijk gemotiveerde keuze van axioma's en begrippen. Een doel van mijn praatje was dan ook, U een blijk van het tegendeel te laten zien: een aantal wiskundige deelgebieden, ten nauwste met elkaar verbonden en gemotiveerd door de behoefte problemen op te lossen die wiskundigen reeds lang bezighouden, zoals: het oplossen van vergelijkingen.

LITERATUUR

Over algebraïsche krommen:

K. KENDIG, *Elementary Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, Berlijn etc., 1977, Graduate Texts in Mathematics, vol. 44.

Zeer leesbaar, accent op topologische eigenschappen van krommen; behandelt ook in hogere dimensies het verband tussen algebraïsche variëteiten en idealen in polynoomringen; bevat verder niet zo veel resultaten. Een goede kennis-making.

Iets lastiger, zeker meer algebraïsch gericht, zijn:

W. FULTON, *Algebraic Curves*, W.A. Benjamin Inc., New York, 1969.

R.J. WALKER, *Algebraic Curves*, Dover Publications Inc., New York, 1962.

Over algebra en polynoomringen:

B.L. VAN DER WAERDEN, *Algebra I, II*, Springer-Verlag, Berlijn etc.

Algemene inleidingen in de algebraïsche meetkunde die meer voorkennis eisen zijn:

- B.L. VAN DER WAERDEN, *Einführung in die algebraïsche Geometrie*, Springer-Verlag, 1973, Grundlehren 51, 2de druk.
- I.R. SHAFAREVICH, *Basic Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, 1977, Grundlehren 213 (zeer vele drukfouten; de 'student edition' is veel beter en goedkoper).
- R. HARTSHORNE, *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, 1977, Graduate Texts in Math. no. 52 (zeer aan te bevelen, m.i. het beste standaardwerk tot nu toe, echter wel voor specialisten).
- D. MUMFORD, *Algebraic Geometry, I: Complex Projective Varieties*, Springer-Verlag, 1976, Grundlehren 221.

Toepassingen van Meetkunde in Differentiaalvergelijkingen

J.C.S.P. van der Woude
 Voordracht van de vakantiecursus uit 1978

1. AUTONOME DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN

Laat f_1 en f_2 continue reëelwaardige functies zijn op \mathbb{R}^2 . Beschouw dan de volgende differentiaalvergelijking:

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_1 &= f_1(\phi_1, \phi_2), \\ \dot{\phi}_2 &= f_2(\phi_1, \phi_2).\end{aligned}$$

Een oplossing van deze differentiaalvergelijking is een tweetal π_1 en π_2 van differentieerbare reëelwaardige functies op \mathbb{R} , waarvoor voor alle $t \in \mathbb{R}$ geldt:

$$\begin{aligned}\dot{\pi}_1(t) &= f_1(\pi_1(t), \pi_2(t)), \\ \dot{\pi}_2(t) &= f_2(\pi_1(t), \pi_2(t))^\dagger.\end{aligned}$$

Als we $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiëren door $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$, dan kunnen we de vergelijking verkort weergeven door:

$$\dot{\phi} = f(\phi).$$

Een oplossing is dan een afbeelding $\pi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, differentieerbaar, waarvoor voor alle $t \in \mathbb{R}$ geldt

$$\dot{\pi}(t) = f(\pi(t)).$$

Denk bij $\pi(t) = (\pi_1(t), \pi_2(t))$ aan een plaats als functie van de tijd (beweging) en aan $\dot{\pi}(t) = (\dot{\pi}_1(t), \dot{\pi}_2(t))$ als de bijbehorende snelheid. De differentiaalvergelijking vraagt dan naar een beweging met een uitsluitend door de plaats bepaalde snelheid en merk op dat het 'snelheidsveld' onafhankelijk is van het moment; het is een autonoom gegeven. We noemen zo'n differentiaalvergelijking dan ook *autonoom*.

Zij nu $(p, q) \in \mathbb{R}^2$, een oplossing van het *beginwaardeprobleem*

$$\dot{\phi} = f(\phi), \quad \phi(t_0) = (p, q),$$

is een oplossing $\pi_{(p,q)}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ van de differentiaalvergelijking, waarvoor geldt $\pi_{(p,q)}(t_0) = (p, q)$. Aanschouwelijk: $\pi_{(p,q)}(t)$ is de positie op tijdstip t van een punt dat zich op tijdstip t_0 in (p, q) bevindt en zich beweegt in een

[†] Hierin duidt, zoals gebruikelijk, $\dot{\pi}$ de afgeleide aan van een functie $\pi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$.

snelheidsveld dat beschreven wordt door $f = (f_1, f_2)$.

Het is denkbaar, dat er in een punt $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ meerdere oplossingen $\pi_{(p, q)}$ zijn van het beginwaardeprobleem, of dat een oplossing $\pi_{(p, q)}$ niet op geheel \mathbb{R} is gedefinieerd. We zullen echter in het vervolg slechts die beginwaardeproblemen bekijken, die een unieke oplossing hebben die op geheel \mathbb{R} is gedefinieerd.

VOORBEELDEN

- (i) $\dot{\phi}_1 = a\phi_1$ en $\phi_1(0) = p$
 $\dot{\phi}_2 = b\phi_2$ en $\phi_2(0) = q$.

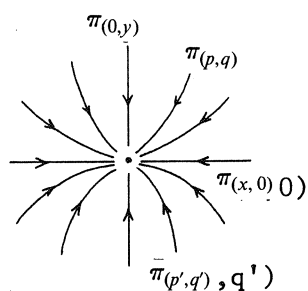
Dit beginwaardeprobleem heeft de oplossing:

$$\pi_{1(p, q)}(t) = pe^{at}$$

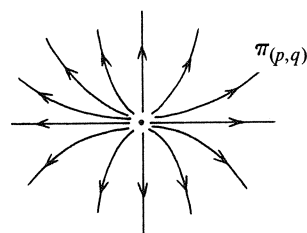
$$\text{ofwel } \pi_{(p, q)}(t) = (pe^{at}, qe^{bt}),$$

$$\pi_{2(p, q)}(t) = qe^{bt}$$

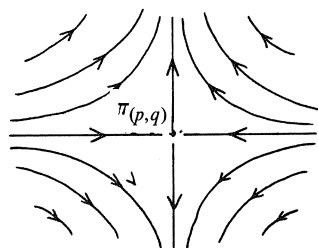
$b < a < 0$



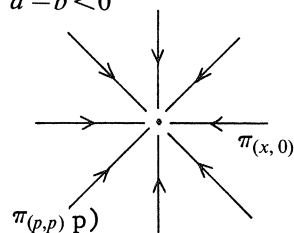
$b > a > 0$



$a < 0 < b$



$a = b < 0$

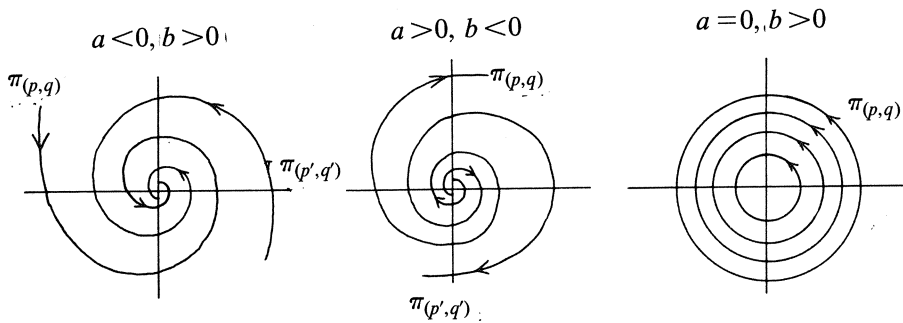


- (ii) $\dot{\phi}_1 = a\phi_1 - b\phi_2$ en $\phi_1(0) = p$
 $\dot{\phi}_2 = b\phi_1 + a\phi_2$ en $\phi_2(0) = q$.

Oplossing:

$$\pi_{1(p, q)}(t) = pe^{at} \cos bt - qe^{at} \sin bt,$$

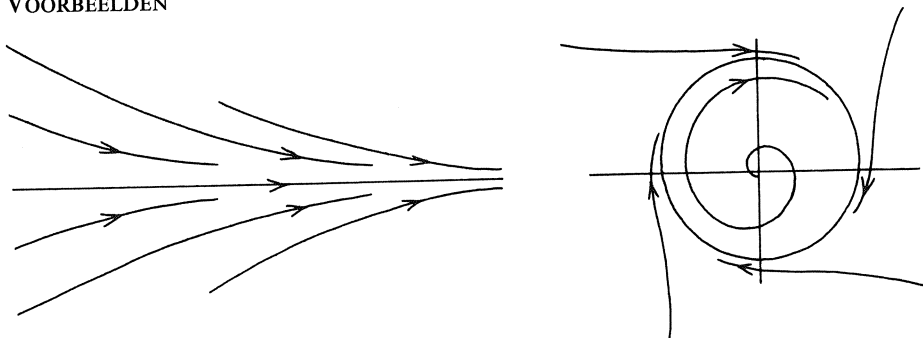
$$\pi_{2(p, q)}(t) = pe^{at} \sin bt + qe^{at} \cos bt.$$



Dergelijke plaatjes met *oplossingskrommen*, of liever *banen* die door de punten worden beschreven, zullen we *fase-portretten* noemen. Merk nog op dat als we het over autonome differentiaalvergelijkingen hebben de banen niet veranderen in de tijd! Dus de banen zijn disjunct of vallen samen (uniciteit). Het doel is nu meetkundige regelmatigheden in dergelijke fase-portretten te onderzoeken; daartoe zullen we een stukje theorie ontwikkelen. Eigenlijk willen we zoveel mogelijk over zo'n fase-portret van een differentiaalvergelijking zeggen, zonder deze expliciet op te lossen.

In alle bovenstaande gevallen bijvoorbeeld is $f_1(0,0) = f_2(0,0) = 0$. In het punt $(0,0)$ is de snelheid dus 0 en inderdaad blijkt $(0,0)$ een *evenwichtspunt* te zijn. Soms bewegen andere punten naar $(0,0)$ toe (n.l. als $a < 0$), of er van af. Hoe kan men een dergelijke *stabiliteit* van zo'n evenwichtspunt definiëren? Andere vragen zijn: Welke typen banen kan men onderscheiden? Waartoe naderen punten als $t \rightarrow \infty$?

VOORBEELDEN



$$\dot{\phi}_1 = 1$$

$$\dot{\phi}_2 = -\phi_2$$

$$\dot{r} = r(1-r)$$

$$\dot{\theta} = 1$$

2. NOG IETS OVER DE INTERPRETATIE

Veel fysische systemen zijn conservatief, dat wil zeggen: het gedrag, zowel in de toekomst als in het verleden van het systeem, wordt uitsluitend bepaald door de toestand waarin het verkeert, terwijl het tijdstip waarop het zich in die toestand bevindt niet ter zake doet (denk aan een stroming waarvan het stroomlijnenbeeld niet verandert in de tijd). Laat zo'n systeem door een n -tal parameters beschreven zijn, zeg $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, dat wil zeggen door punten $x \in \mathbb{R}^n$ (b.v. een aantal deeltjes beschreven door plaatscoördinaten ξ_1, \dots, ξ_k en snelheidscomponenten ξ_{k+1}, \dots, ξ_n met $n = 2k$). Zo'n punt uit het systeem beschrijft dan een baan (van toestanden) in de tijd; het fase-portret is de collectie van alle mogelijke banen, uitgaande van alle mogelijke toestanden. Merk nogmaals op dat de banen disjunct zijn of samenvallen.

Het gedrag van het systeem kan nu beschreven worden door een functie $p: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$, waarbij $p(x, t_1, t_2)$ de toestand aanduidt op tijdstip t_2 van een punt uit het systeem dat zich op tijdstip t_1 in x bevindt (ook laten we $t_2 \leq t_1$ toe!). Als het systeem conservatief is zal p niet zo zeer van t_1 en t_2 afzonderlijk afhangen, als wel van het verschil $t_2 - t_1$ en uiteraard van x . Dus

$$p(x, t_1, t_2) = p(x, 0, t_2 - t_1) = p(x, t_1 + s, t_2 + s), \text{ met } t_1, t_2, s \in \mathbb{R}.$$

Schrijf nu

$$\pi(x, t) = p(x, 0, t) \text{ voor alle } x \in \mathbb{R}^n \text{ en } t \in \mathbb{R}.$$

Dan geldt

- a) $\pi(x, 0) = p(x, 0, 0) = x$,
 b) $\pi(\pi(x, t), s) = p(p(x, 0, t), 0, s) = p(p(x, 0, t), t, t + s)$
 $= p(x, 0, t + s) = \pi(x, t + s)$

(Immers, als we op tijdstip 0 vertrekken, arriveren we op tijdstip t in $p(x, 0, t)$, als we dan verder gaan vanuit $p(x, 0, t)$ op tijdstip t belanden we op tijdstip $t + s$ in $p(p(x, 0, t), t, t + s)$; zonder realisatie van moment t onderweg zouden we uitkomen in $p(x, 0, t + s)$.)

Ergo: conservatieve systemen worden beschreven door een functie $\pi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ met

- (i) $\pi(x, 0) = x$ voor alle $x \in \mathbb{R}^n$,
 (ii) $\pi(\pi(x, t), s) = \pi(x, t + s)$ voor alle $x \in \mathbb{R}^n$ en $s, t \in \mathbb{R}$.

Vaak is het zo, dat niet alle punten van \mathbb{R}^n een toestand van het systeem beschrijven, maar dat de toegelaten toestanden een deelverzameling X van \mathbb{R}^n vormen. Dan moet uiteraard gewerkt worden met een functie $\pi: X \times \mathbb{R} \rightarrow X$ die de eigenschappen (i) en (ii) heeft. In concrete gevallen heeft π vaak nog meer eigenschappen, geformuleerd in fysische wetten, die voor het systeem gelden. Bij de wiskundige analyse van dergelijke systemen abstraheren we daarvan, maar wel postulieren we die eigenschappen voor π , die de meeste fysische systemen gemeenschappelijk hebben. Zo'n eigenschap kan zijn:

- (iii) $\pi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ (of $\pi: X \times \mathbb{R} \rightarrow X$) is continu.

Hoewel het voor de resultaten die straks komen nauwelijks van belang is, is het voor de bewijsvoering erg gemakkelijk als we nog iets meer eisen.

(iv) Voor elke $x \in \mathbb{R}^n$ is de functie $\pi_x: t \mapsto \pi(x, t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ differentieerbaar (alle coördinaten zijn differentieerbaar) met continue afgeleide.

In het bijzonder volgt uit (i), (ii) en (iv) dat door

$$f(x) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\pi_x(h) - \pi_x(0)}{h} \quad (\text{coördinaatsgewijs})$$

een continue functie $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ wordt gedefinieerd en dat

$$f(\pi(x, t_0)) = \frac{d}{dt} \pi_x|_{t_0}.$$

Immers:

$$\begin{aligned} f(\pi(x, t_0)) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\pi(\pi(x, t_0), h) - \pi(x, t_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\pi(x, t_0 + h) - \pi(x, t_0)}{h} = \frac{d}{dt} \pi_x|_{t_0}. \end{aligned}$$

Met andere woorden, de functie $\pi_x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ is differentieerbaar op \mathbb{R} en de afgeleide $\dot{\pi}_x$ voldoet aan

$$\dot{\pi}_x(t) = f(\pi_x(t)) \quad \text{voor alle } t \in \mathbb{R}$$

en

$$\pi_x(0) = x.$$

Kortom, π_x is de oplossing van het beginwaardeprobleem

$$\dot{\phi} = f(\phi) \quad \text{en} \quad \phi(0) = x.$$

Daarmee zijn we terug bij onze oplossingskrommen van autonome differentiaalvergelijkingen: dat zijn dus in dit geval de banen die de punten (toestanden) kunnen beschrijven in de tijd. Omgekeerd is het niet zo moeilijk om aan te tonen, dat oplossingen van autonome differentiaalvergelijkingen conservatieve processen beschrijven in de zin dat (ii) geldt.

We zullen ons bezighouden met systemen (X, π) met $X \subset \mathbb{R}^2$ en $\pi: X \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ een afbeelding die voldoet aan (i), (ii) en (iii). Het onderdeel der wiskunde dat deze systemen bestudeert (weliswaar met meer algemene X) heet *Topologische Dynamica*. Gemakshalve zullen we ook (iv) aannemen; we spreken dan van *Differentieerbare Dynamica* of *Meetkundige theorie van Differentiaalvergelijkingen*. In feite zijn we dan bezig met het bestuderen van fase-portretten van oplossingen van differentiaalvergelijkingen.

3. CLASSIFICATIE VAN BANEN IN VLAKKE DYNAMISCHE SYSTEMEN

Onder een *vlak dynamisch systeem* verstaan we een dynamisch systeem (X, π) , waarin X een open deelverzameling is van \mathbb{R}^2 . De volgende definities (en een aantal van de resultaten) kunnen voor willekeurige dynamische systemen gegeven worden.

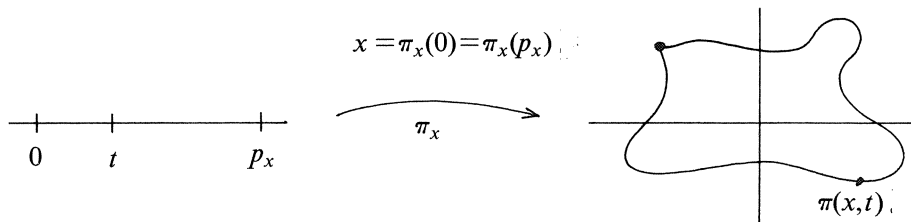
Beschouw een systeem (X, π) en zij $x \in X$. De *baan* van x is de collectie $\{\pi(x, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Een verzameling $A \subseteq X$ heet *invariant* als voor ieder punt uit A geldt dat z'n baan binnen A zit. We zullen nu bekijken wat voor banen zoal kunnen voorkomen in een vlak dynamisch systeem.

Een punt $x = (\xi_1, \xi_2) \in X$ heet een *evenwichtspunt* als $\pi_x(t) = x$ voor alle $t \in \mathbb{R}$. De baan van x bestaat louter uit x zelf (en het vectorveld is daar 0). Als x geen evenwichtspunt is, noemen we x een *bewegend punt*.

Een punt x heet een *periodiek punt* en $\pi_x(t \mapsto \pi(x, t))$ heet een *periodieke beweging* indien er een $t \geq 0$ bestaat waarvoor $\pi(x, t) = x$. In dat geval heet t een *periode* van x . Merk daarbij op, dat een evenwichtspunt ook een periodiek punt is.

Als x een bewegend periodiek punt is, bestaat er een $p_x \geq 0$ zodanig, dat $\{kp_x \mid k \in \mathbb{Z}\}$ de verzameling van alle perioden van x is; p_x heet dan de *primitieve periode* of *de periode*.

Zij nu $0 \leq t_1 < t_2 < p_x$; dan is $\pi_x(t_1) \neq \pi_x(t_2)$ (immers, $\pi_x(t_1) = \pi_x(t_2) \Leftrightarrow x = \pi_x(0) = \pi_x(t_2 - t_1) \Rightarrow t_2 - t_1 = kp_x$ voor zekere $k \in \mathbb{Z}$; tegenspraak). De afbeelding π_x beperkt tot het interval $[0, p_x]$ beeldt dit interval continu af in het platte vlak, op zodanige wijze dat alleen de eindpunten geïdentificeerd worden.



Het is niet moeilijk aan te tonen (hoewel het te ver voert om dat hier te doen) dat de afbeelding

$$(\cos \phi, \sin \phi) \mapsto \pi_x\left(\frac{p_x}{2\pi}\phi\right) \quad 0 < \phi \leq 2\pi,$$

een één-éénduidige, continue afbeelding van de eenheidscirkel op de baan van x is, waarvan de inverse afbeelding ook continu is. Men drukt dit uit door te zeggen dat de baan van een periodiek bewegend punt x *topologisch een cirkel* is.

Indien x een bewegend, niet periodiek punt is, dan is $\pi_x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ één-éénduidig en continu; de baan van x is dan een continu, één-éénduidig beeld van \mathbb{R} maar hoeft in het algemeen nog niet op \mathbb{R} te lijken. We zullen aantonen dat in het vlakke geval de baan van een bewegend, niet-periodiek punt

topologisch hetzelfde is als \mathbb{R} . In hogere dimensies kunnen tegenvoorbeelden geconstrueerd worden (laat op de torus een punt vertrekken onder een irrationale hoek; dan is de baan van x een dichte deelverzameling van de torus en niet meer topologisch \mathbb{R}).

In ieder dynamisch systeem geldt, dat de baan van x topologisch \mathbb{R} is als en slechts als er geen rij $\{t_n\} \rightarrow \infty$ (of $-\infty$) is zodat $\{\pi_x(t_n)\} \rightarrow x$. Op het vrij eenvoudige bewijs gaan we niet in; het komt er op neer dat punten van \mathbb{R} , die ver uit elkaar liggen, door π_x niet willekeurig dicht bij elkaar afgebeeld mogen worden.

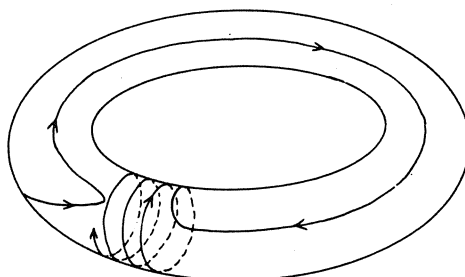
De rest van deze paragraaf zal worden gevuld met een schets van het bewijs, dat in het 2-dimensionale geval voor ieder niet-periodiek bewegend punt geldt:

$$\text{er is geen rij } \{t_n\} \rightarrow \pm\infty \text{ zo, dat } \{\pi_x(t_n)\} \rightarrow x, \quad (*)$$

ofwel:

STELLING. *Zij x een bewegend niet-periodiek punt, dan is de baan van x topologisch gelijk aan \mathbb{R} .*

Voor niet-periodieke punten in hogere dimensies zijn er voorbeelden te construeren, waarin een rij $\{t_n\} \rightarrow \infty$ gevonden wordt zo, dat $\{\pi_x(t_n)\} \rightarrow x$.



Voor periodieke punten in \mathbb{R}^2 is er natuurlijk altijd een rij $\{t_n\} \rightarrow \infty$ met $\{\pi_x(t_n)\} \rightarrow x$; neem maar $t_n = np_x$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

Teneinde bewering (*) te bewijzen hebben we twee diepe stellingen nodig, één uit de topologie en één uit de topologische dynamica.

a. De stelling uit de topologie

Eerst wat terminologie: een continu, één-éénduidig beeld van een interval heet een *Jordan-boog*; bijvoorbeeld een stukje baan van een bewegend punt x , zeg $\pi_x[a, b]$, mits $|b - a| \leq p_x$. Als van het continue beeld van een interval alleen de eindpunten hetzelfde beeld hebben, heet dat beeld een *gesloten Jordan-kromme*; equivalent: een gesloten Jordan-kromme is het continue één-éénduidige beeld van een cirkel.

VOORBEELDEN

- (i) De baan van een periodiek punt.
- (ii) Een eindige vereniging van Jordan-bogen die 'kop aan staart' verbonden zijn en elkaar verder niet snijden, waarbij het eindpunt van de laatste samenvalt met het beginpunt van de eerste.

Een *open* deelverzameling $U \subseteq \mathbb{R}^2$ heet *samenhangend* als ieder tweetal punten van U verbonden kan worden door een Jordan-boog in U .

STELLING (JORDAN): *Als K een gesloten Jordan-kromme is in \mathbb{R}^2 , dan bestaat het complement van K uit twee disjuncte, niet lege, open, samenhangende deelverzamelingen U en V . Als $x \in U$ en $y \in V$ en B is een Jordan-boog die x en y verbindt, dan geldt $B \cap K \neq \emptyset$.*

Merk op, dat één van de gebieden U en V die in de stelling genoemd worden begrensd is en de andere niet. Ze heten respectievelijk *binnen-* en *buitengebied* van K .

Een voorbeeld is de baan K van een periodieke beweging. Omdat banen elkaar niet snijden zonder geheel samen te vallen, zijn binnen- en buitengebied van K invariant.

b. *De stelling uit de topologische dynamica*

We zullen deze stelling niet in z'n volle algemeenheid formuleren. Merk eerst op, dat een Jordan-boog S in \mathbb{R}^2 georiënteerd kan worden en dat het dan zinvol is te zeggen dat een segment van een baan (in een vlak dynamisch systeem) dat S in één punt snijdt, van links naar rechts of van rechts naar links doorlopen wordt. (De banen worden doorlopen in de richting die hoort bij toenemende t .) In het bijzonder heeft het zin te zeggen dat een collectie baansegmenten, die elk S snijden, in dezelfde richting doorlopen worden. We zullen zeggen, dat al deze baansegmenten de gegeven boog S volgens *dezelfde oriëntatie* snijden en merk op dat dit laatste onafhankelijk is van de gekozen oriëntatie op S .

STELLING. *Indien x_0 een bewegend punt is, dan bestaat er een Jordan-boog B met x_0 als 'intern' punt zo, dat alle banen die B snijden, dat volgens dezelfde oriëntatie doen. Zo'n boogje heet een 'transversaal'. Voorts is er voor iedere omgeving U van x_0 een transversaal B' en een $\epsilon > 0$, zodat*

$$B'(\epsilon) = \{\pi(y, t) \mid y \in B' \text{ en } t \in (-\epsilon, +\epsilon)\} \subseteq U$$

en $B'(\epsilon)$ is een omgeving van x_0 . We zullen $B'(\epsilon)$ een 'buisje' noemen.

BEWIJS (ruwe schets). Omdat we spreken over differentieerbare systemen ($\dot{\phi} = f(\phi)$), kunnen we zeggen dat de snelheidsvector in x_0 niet nul is, want x_0 was een bewegend punt, dus $f(x_0) \neq 0$. Daar de snelheidsvector $f(x)$ continu afhangt van de plaats, zijn in een kleine omgeving van x_0 alle snelheidsvectoren niet nul, terwijl ze een hoek van niet meer dan 45° maken met $f(x_0)$. Een

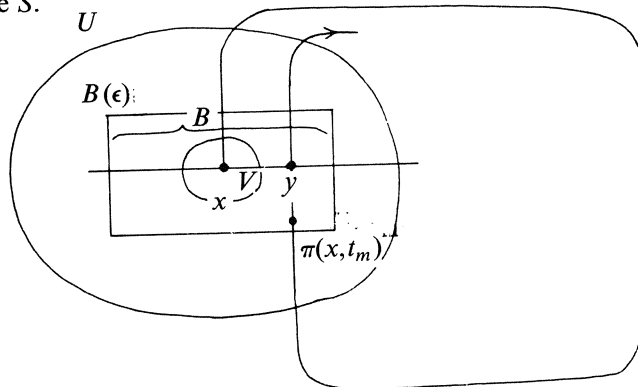
lijnsegmentje B door x_0 , dat binnen die omgeving blijft en loodrecht staat op $f(x_0)$, voldoet aan alle eisen. Wat de oriëntatie betreft is dit evident; de bewering omtrent het buisje is iets minder triviaal en die bewijzen we hier niet.
 N.B.: Als x_0 bewegend is, heeft x_0 een lokale basis bestaande uit buisjes (en buisjes bevatten alleen bewegende punten!).

Nu we de stellingen uit de topologie en de topologische dynamica ten tonele gevoerd hebben, kunnen we de bewering (*) van bladzijde 7 bewijzen: en dus de stelling die daaronder werd vermeld.

We moeten dus bewijzen, dat er geen rij $\{t_n\} \rightarrow \infty$ bestaat zodat $\{\pi_x(t_n)\} \rightarrow x$ als x een niet-periodiek, bewegend punt is.

Stel er is wel zo'n rij $\{t_n\}$; zonder beperking der algemeenheid geldt $0 = t_1 < t_2 < \dots \rightarrow \infty$ en $\{\pi_x(t_n)\} \rightarrow x$. Omdat x een bewegend punt is, is er een transversaal B door x en een $\epsilon > 0$, zodat $B(\epsilon)$ een omgeving is van x met louter bewegende punten. Dan bestaat een $m \in \mathbb{N}$ zodat $\pi_x(t_m) \in B(\epsilon)$, zeg $\pi_x(t_m) = \pi_y(s)$ met $y \in B$ en $s \in (-\epsilon, +\epsilon)$. Dus $y = \pi_x(t_m - s) \in B$ en voor $t' := t_m - s$ geldt: $|t' - t_m| < \epsilon$ en $\pi_x(t') \in B$. Met andere woorden, na verloop van tijd t' komt x weer terug in B (en volgens dezelfde oriëntatie als bij vertrek!). Zonder beperking der algemeenheid zij t' het eerste tijdstip waarop x weer in B terugkomt.

De baan die x tussen $t = t_1 = 0$ en $t = t'$ doorloopt, samen met het segment van de transversaal tussen x en $y = \pi(x, t')$, vormt een gesloten Jordan-kromme S .



U is de omgeving van x met louter bewegende punten

- (i) Voor $t > t'$ is $\pi_x(t)$ niet meer in het baansegment $\pi_x[0, t']$, want anders zou x periodiek zijn; dat wil zeggen x komt niet meer in het buitengebied van S via het 'baangedeelte' van S .
- (ii) x komt ook niet meer buiten S via het 'transversaal' gedeelte van S , want x kan niet 'tegen de stroom opzwemmen'.

Maar dan is er een omgeving V van x waarbinnen $\pi_x(t)$ niet meer kan komen voor $t > t'$. Dit is in strijd met $\{\pi_x(t_n)\} \rightarrow x$ en $t_n \rightarrow \infty$. De enige mogelijkheid die overblijft is dat $x = \pi(x, t')$ en dus dat x periodiek is.

4. LIMIETVERZAMELINGEN

De bestudering van limietverzamelingen is eigenlijk het zoeken naar het antwoord op de vraag: Wat gebeurt er op de lange duur, wat is het gedrag van een oplossing als $t \rightarrow \infty$ of $t \rightarrow -\infty$?

Voor elk punt $x \in X$ kunnen de zogenaamde *limietverzamelingen* gedefinieerd worden door

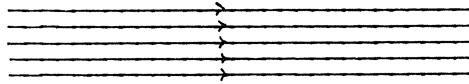
$$\Omega(x) = \{y \in X \mid \text{er is een rij } \{t_n\} \rightarrow \infty \text{ zodat } \{\pi_x(t_n)\} \rightarrow y\},$$

$$A(x) = \{y \in X \mid \text{er is een rij } \{t_n\} \rightarrow -\infty \text{ zodat } \{\pi_x(t_n)\} \rightarrow y\}.$$

Dit zijn respectievelijk de *positieve* en *negatieve* limietverzamelingen. We zullen ons verder concentreren op de positieve limietverzamelingen. Voor de negatieve limietverzamelingen gaat alles op dezelfde wijze.

Natuurlijk kan $\Omega(x)$ best wel eens leeg zijn voor alle x .

VOORBEELD



Als x een periodiek punt is (eventueel evenwichtspunt) vallen $\Omega(x)$ en $A(x)$ samen met de baan van x ; dus $x \in \Omega(x) \cap A(x)$.

In paragraaf 3 hebben we aangetoond, dat het in vlakke systemen niet kan voorkomen dat $x \in \Omega(x)$ of $x \in A(x)$ als x niet periodiek is. Met andere woorden:

$$x \in \Omega(x) \text{ of } x \in A(x) \Leftrightarrow x \text{ is een periodiek punt.}$$

Als x niet periodiek is, is $\Omega(x) \cup A(x)$ de verzameling punten, die men aan de baan van x moet toevoegen om z'n afsluiting te krijgen.

LEMMA. $\Omega(x)$ is invariant.

Immers, als $y \in \Omega(x)$, zeg $y = \lim \pi_x(t_n)$ met $\{t_n\} \rightarrow \infty$ dan geldt $\pi(y, t) = \lim \pi_x(t_n + t)$ met $\{t_n + t\} \rightarrow \infty$, dus $\pi(y, t) \in \Omega(x)$.

STELLING. Als de halfbaan $\pi_x[0, \infty)$ van x begrensd is, dan is $\Omega(x) \neq \emptyset$. In dat geval is $\Omega(x)$ compact en voor iedere omgeving U van $\Omega(x)$ is er een $t > 0$, zodat $\pi_x(s) \in U$ als $s \geq t$.

BEWIJS. De rij $\{\pi_x(n)\}_{n=0}^{\infty}$ is begrensd en heeft dus een convergente deelrij in \mathbb{R}^2 , zeg met limiet y . Dan is uiteraard $y \in \Omega(x)$ en dus $\Omega(x) \neq \emptyset$. $\Omega(x)$ is compact want $\Omega(x)$ is begrensd en gesloten in \mathbb{R} .

(i) $\Omega(x)$ is zeker begrensd, want alle mogelijke rijen $\{\pi_x(t_n)\}$ liggen in één of andere cirkelschijf ($\pi_x[0, \infty)$ is begrensd).

- (ii) $\Omega(x)$ is gesloten, want laat voor alle $n \in \mathbb{N}$ een $z_n \in \Omega(x)$ gegeven zijn en zij $z = \lim z_n$; bij iedere $n \in \mathbb{N}$ is er een $t_n \in \mathbb{R}$ met $t_n \geq n$ en afstand $(\pi_x(t_n), z_n) < \frac{1}{n}$. Dan is

$$\text{afstand}(\pi_x(t_n), z) \leq \text{afstand}(\pi_x(t_n), z_n) + \text{afstand}(z_n, z).$$

Daar het rechterlid naar nul nadert voor $n \rightarrow \infty$ is $z = \lim \pi_x(t_n)$ voor $n \rightarrow \infty$ en daar $t_n \rightarrow \infty$ als $n \rightarrow \infty$ is $z \in \Omega(x)$; dus $\Omega(x)$ is gesloten.

Tenslotte: stel er is een omgeving U van $\Omega(x)$ zo, dat er bij elke $t \in \mathbb{R}$ een $t' > t$ is met $\pi_x(t') \notin U$. Omdat $\Omega(x)$ compact is, is er een $\epsilon > 0$, zo dat alle punten buiten U een afstand tot $\Omega(x)$ hebben die groter is dan ϵ . Bij elke $n \in \mathbb{N}$ is er volgens aanname een $t_n > n$ zo, dat $\pi_x(t_n) \notin U$ en dus zo, dat de afstand $(\pi_x(t_n), \Omega(x)) > \epsilon$. De rij $\{\pi_x(t_n)\}$ heeft weer een convergente deelrij, zeg met limiet y . Deze y zit in $\Omega(x)$, maar anderzijds is y de limiet van punten die meer dan ϵ verwijderd zijn van $\Omega(x)$, dus heeft y zelf een afstand tot $\Omega(x)$ die groter of gelijk is aan ϵ . Tegenspraak.

We zullen nu nagaan hoe $\Omega(x)$ er uit kan zien als de positieve halfbaan in zicht blijft.

STELLING (POINCARÉ-BENDIXSON). *Zij x een bewegend punt en $\pi_x[0, \infty)$ begrensd. Dan geldt één van de volgende elkaar uitsluitende mogelijkheden.*

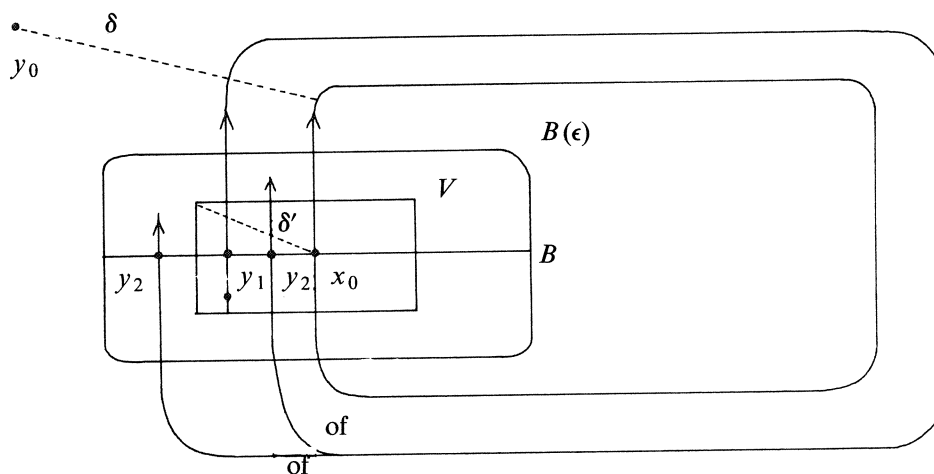
- (i) x is periodiek (en $\Omega(x)$ valt samen met de baan van x);
- (ii) $\Omega(x)$ bevat een evenwichtspunt;
- (iii) $\Omega(x)$ is disjunct met de baan van x maar $\Omega(x)$ is juist de baan van een periodieke beweging ('limietcykel').

BEWIJS. Duidelijk is dat (i), (ii) en (iii) elkaar uitsluiten. Neem aan dat (i) en (ii) niet gelden; we tonen aan dat (iii) geldt, op de volgende wijze:

- a. $\Omega(x)$ bevat een periodiek punt x_0 ,
- b. als ook $y \in \Omega(x)$ dan is y periodiek en de baan van y is dezelfde als die van x_0 .

ad a. Omdat $\Omega(x)$ gesloten en invariant is, bevat $\Omega(x)$ een *minimale* gesloten invariante deelverzameling (dat is een gesloten invariante deelverzameling M in $\Omega(x)$, $M \neq \emptyset$, en M heeft geen echte, niet lege gesloten invariante deelverzamelingen). Het bestaan van M volgt uit de compactheid van $\Omega(x)$, door middel van een toepassing van het lemma van Zorn (equivalent met het keuzeaxioma). Zij nu $x_0 \in M$; dan is ook $\Omega(x) \subseteq M$, want M is gesloten en invariant. Nu is $\Omega(x_0) \neq \emptyset$, want $M \subseteq \Omega(x)$, dus M is compact en begrensd en daar $\pi_{x_0}[0, \infty) \subseteq M$, is $\pi_{x_0}[0, \infty)$ begrensd, waaruit volgt dat $\Omega(x_0) \neq \emptyset$. Ook is $\Omega(x_0)$ gesloten en invariant, dus $\Omega(x_0) = M$ want M was minimaal. In het bijzonder is $x_0 \in M = \Omega(x_0)$ dus x_0 is periodiek. (Merk op: x_0 is geen evenwichtspunt, want $\Omega(x)$ bevatte geen evenwichtspunten volgens aanname.)

ad b. Zij $y_0 \in \Omega(x)$. We zullen aantonen dat y_0 tot de baan S van x_0 behoort. Neem maar eens aan dat dit niet zo is en bedenk dat S gesloten is. Dus $y_0 \notin S$, zeg afstand $(S, y_0) = \delta > 0$. Merk op dat via de stelling van Jordan geconcludeerd mag worden dat x en y_0 aan dezelfde kant van S liggen. Anders zou y_0 immers niet benaderd kunnen worden door de baan van x zonder dat de baan van x de gesloten Jordan-kromme S (= baan van de periodieke beweging door x_0) snijdt, waardoor x periodiek zou zijn. Zonder beperking der algemeenheid nemen we x en y_0 in het buitengebied van S . Omdat x_0 bewegend is, is er een buisje $B(\epsilon)$ om x_0 (B transversaal in x_0 en $\epsilon > 0$). Kies $\delta' > 0$ met $2\delta' < \delta$ zodat $\{z \mid \text{afstand}(z, x_0) < \delta'\} \subseteq B(\epsilon)$. Daar π continu is in beide variabelen is er een omgeving V van x_0 zodat $V \subseteq B(\epsilon)$ en afstand $(\pi_{x_0}(t), \pi_y(t)) < \delta'$ voor alle $t \in [0, p_{x_0} + \epsilon)$. Zonder beperking der algemeenheid is V een buisje om x_0 ofwel $V = (B \cap V)(\epsilon')$ met $0 < \epsilon' \leq \epsilon$. Nu geldt, dat er een $t_1 \in \mathbb{R}$ is met $y_1 = \pi(x, t_1) \in B \cap V$, immers V is een omgeving van x_0 dus $\exists t_0 \in \mathbb{R}$ met $\pi(x, t_0) \in V = (B \cap V)(\epsilon')$, dus er is een $y_1 \in B \cap V$ en een $s \in (-\epsilon', +\epsilon')$ zodat $\pi(x, t_0) = \pi(y_1, s)$, dan is $y_1 = \pi(x, t_0 - s) \in B \cap V$; zij dus $t_1 := t_0 - s$. Omdat $y_1 \in V$, is afstand $(\pi_{x_0}(p_{x_0}), \pi_{y_1}(p_{x_0})) < \delta'$ en daar $x_0 = \pi_{x_0}(p_{x_0})$, is dus $\pi_{y_1}(p_{x_0}) \in \{z \mid \text{afstand}(x_0, z) < \delta'\} \subseteq B(\epsilon)$. Er is derhalve een $s' \in (-\epsilon, +\epsilon)$ met $\pi_{y_1}(p_{x_0} + s') \in B$; noem nu $t_2 := t_1 + p_{x_0} + s'$ en $y_2 := \pi(x, t_2) \in B$. Voor alle $t \in \mathbb{R}$ met $t_1 \leq t \leq t_2$ geldt nu dat afstand $(\pi_{x_0}(t), \pi_{y_1}(t)) < \delta'$, dus in het bijzonder is afstand $(\pi_{y_1}(t), S) < \delta'$ (ofwel y_1 wordt met x_0 meegeslept op afstand $< \delta'$ van S).



Stel nu dat y_2 niet tussen y_1 en x_0 ligt. Dan kan voor $t > t_2$ het bewegend punt $\pi(x, t)$ niet meer bij x_0 in de buurt komen (want de Jordan-kromme, gevormd door $y_2 y_1 \subseteq B$ en $\pi_x[t_1, t_2]$, kan niet meer gepasseerd worden), zodat $x_0 \notin \Omega(x)$. Tegenspraak, dus y_2 ligt wel tussen y_1 en x_0 . Dan geldt voor alle $t > t_2$ dat $\pi(x, t)$ in de ring blijft, die gevormd wordt door S en de Jordan-kromme $y_1 y_2 \cup \pi_x[t_1, t_2]$, dat wil zeggen voor alle $t > t_2$ geldt afstand

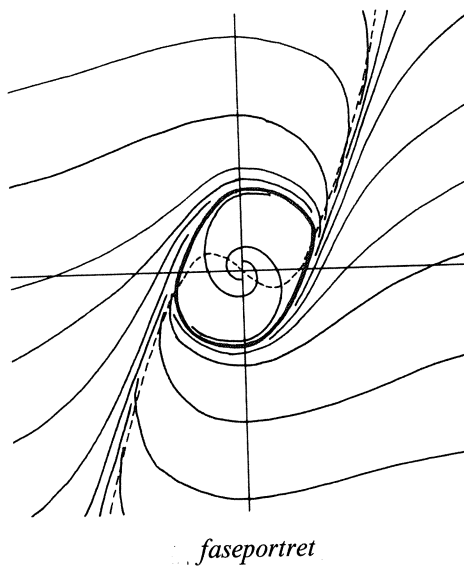
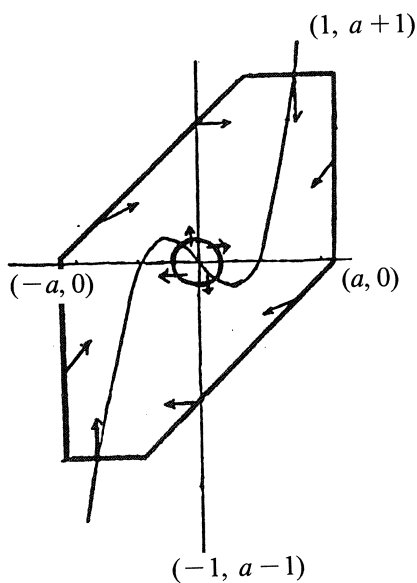
$(\pi_x(t), S) < \delta'$. Maar dan is wegens de driehoeksongelijkheid afstand $(\pi_x(t), y_0) > \delta'$ voor alle $t > t_2$. Dit betekent dat x niet meer in de buurt van y_0 komt, ofwel $y_0 \notin \Omega(x)$. Tegenspraak. Blijkbaar was de aanname $y_0 \notin S$ fout, dus $y_0 \in S$ en de stelling is bewezen.

GEVOLG. Zij W een begrensd gesloten gebied zonder evenwichtspunten waarvan de rand bestaat uit een eindig aantal gesloten Jordan-krommen. Als de banen overal de rand naar binnen toe snijden (naar W toe) dan bevat W minstens één limietcykel.

BEWIJS. W is positief invariant. Dan geldt voor iedere x uit de rand van W , dat x niet periodiek is (anders zou de baan van x ergens het gebied W moeten verlaten, wat niet kan). Dus geldt alternatief (iii) uit de vorige stelling, want $\Omega(x) \subseteq W$ en W heeft geen evenwichtspunten. (Bedenk ook dat W begrensd is en dus $\Omega(x)$ ook.)

VOORBEELD (vergelijking van Van der Pol)

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \eta - \xi^3 + \xi & \text{het enige evenwichtspunt is } (0,0), \text{ immers:} \\ \dot{\eta} &= -\xi & \dot{\eta} = -\xi = 0 \Rightarrow \xi = 0 \text{ en} \\ & & \dot{\xi} = \eta - \xi^3 + \xi = \eta = 0 \Rightarrow \eta = 0. \end{aligned}$$



Neem W het gebied tussen de polygoon en een cirkel om $(0,0)$ met straal kleiner dan 1 (en $a > 2$). Snel is na te gaan, dat de stroming W -inwaarts is, zowel op de polygoon als op de cirkel. Daar W het punt $(0,0)$ niet bevat, zijn er geen evenwichtspunten in W . Ook is W begrensd. Dus volgt uit het gevolg dat W een limietcykel heeft. (Dat er maar één is, is een lastiger bewijs.)

Uit welke begintoestand men ook vertrekt, na verloop van tijd is het systeem bijna in een periodieke beweging. (We herinneren aan het bewijs van Poincaré-Bendixson: als het punt eenmaal in de buurt van de periodieke beweging is gekomen, wordt het 'meegesleept'.)

N.B.: De twee eerste-ordevergelijkingen zijn equivalent met de tweede-ordevergelijking

$$\ddot{\eta} - ((\dot{\eta})^2 + \dot{\eta}) + \eta = 0.$$

De functie $\eta(t)$ die hiervan de oplossing is, beschrijft een elektrisch circuit, waarin een vacuümbuis is opgenomen. In de twee eerste-ordevergelijkingen wordt de toestand van het systeem steeds vastgelegd door η en $\dot{\eta}$ ($= -\xi$), dat wil zeggen door spanning en stroomsterkte.

LITERATUUR

1. V.I. ARNOLD, *Ordinary differential equations*, MIT Press, Cambridge, 1973.
2. A. BECK, *Continuous flows in the plane*, Springer, Grundlehren 201, 1974.
3. N.P. BHATIA & G.P. SZEGÖ, *Stability theory of dynamical systems*, Springer, Grundlehren 161, 1970.
4. G.D. BIRKHOFF, *Dynamical systems*, A.M.S. Colloquium Publications Vol. 9, New York, 1927.
5. W.H. GOTTSCHALK & G.A. HEDLUND, *Topological dynamics*, A.M.S. Colloquium Publications Vol. 26, Providence, 1955.
6. O. HÁJEK, *Dynamical systems in the plane*, Academic Press, New York, 1968.
7. M.W. HIRSCH & S. SMALE, *Differential equations, dynamical systems and linear algebra*, Academic Press, New York, 1974.
8. V.V. NEMYTSKY & V.V. STEPANOV, *Qualitative theory of differential equations*, Princeton University Press, Princeton, 1960 (Russisch 1947).
9. G.R. SELL, *Topological dynamics and ordinary differential equations*, Van Nostrand Reinhold Math. Studies 33, Londen, 1971.
10. K.S. SIBIRSKY, *Introduction to topological dynamics*, Noordhoff, Leiden, 1975.

[7]: Een goed leesbaar, niet te moeilijk leerboek, over differentiaalvergelijkingen, dat alles van de grond af ontwikkelt (b.v. lineaire algebra) en zich vooral richt op de stabiliteitstheorie.

[1]: Een boek over differentiaalvergelijkingen met een aanpak, die verschilt van de traditionele, vooral door de nadruk die gelegd wordt op de meetkundige en kwalitatieve aspecten, waardoor 'intuïtieve' concepten als stromingen en vectorvelden, die in de gebruikelijke boeken onder de oppervlakte blijven, meer naar voren worden gehaald. De voorkennis die gevraagd wordt blijft beperkt

tot elementaire analyse en lineaire algebra. Het boek bevat vele verhelderende illustraties en sluit uitstekend aan op het verhaal in deze Vacantiecursus.

[4]: Dit boek vormt eigenlijk het begin van de studie van dynamische systemen. Het geeft door de aandacht voor problemen met betrekking tot differentiaalvergelijkingen een goed inzicht in de motivatie voor de begrippen in de topologische dynamica. Het boek is echter wel sterk verouderd.

[8]: Het boek bestaat uit twee gedeeltes. Het eerste behandelt op traditionele wijze de studie van differentiaalvergelijkingen, met een knipoog naar de dynamische systemen, die in het tweede gedeelte in meer algemene zin behandeld worden. Vooral door het tweede gedeelte heeft dit boek in de studie van de dynamische systemen de doorbraak gevormd tot abstrahering van de differentiaalvergelijkingen.

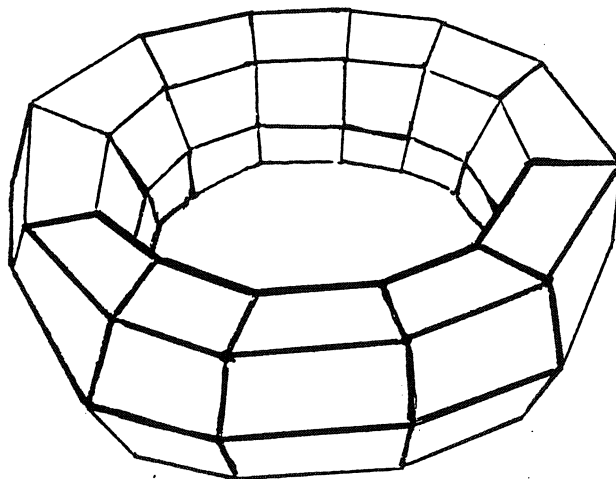
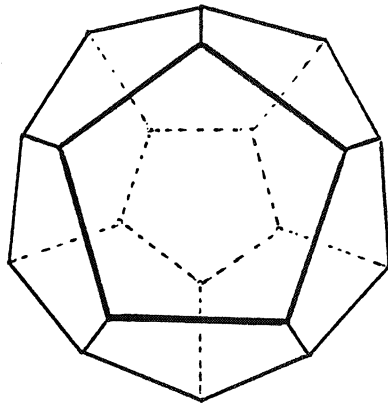
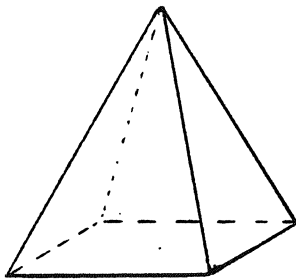
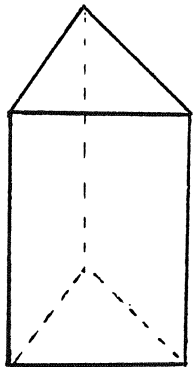
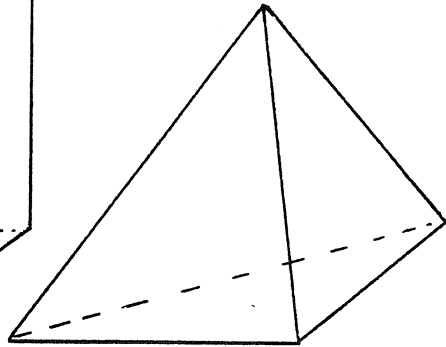
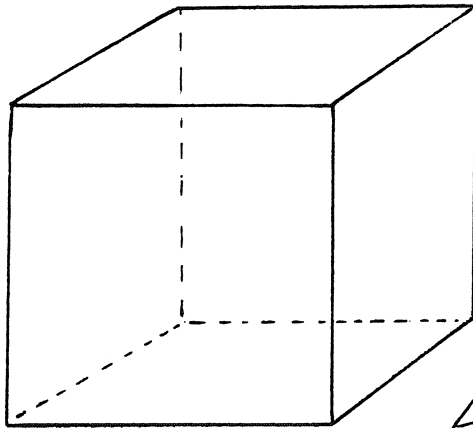
[5]: Een zeer abstracte, algemene benadering van wat wij (in \mathbb{R}^2) gedaan hebben en geheel in termen van topologische ruimten en groepen; geschreven in een uiterst compacte stijl.

[10]: Een inleidend boek in de topologische dynamica, dat, uitgaande van differentiaalvergelijkingen, systemen op metrische ruimten behandelt, maar tevens een brug kan slaan naar de abstracte theorie.

[3]: Een boek dat een systematisch overzicht geeft van de verschillende elementen in de theorie van dynamische systemen op metrische ruimten, met de nadruk op stabiliteit.

[9]: Boekje over topologische dynamica met extra aandacht voor de toepassing van lokale systemen op niet autonome differentiaalvergelijkingen en integraalvergelijkingen.

[2] en [6] zijn gespecialiseerde werken, waarbij de eerste zich vooral richt op de topologische classificatie van banen en systemen, en de tweede meer op de kant van de differentiaalvergelijkingen en lokale systemen.



Veelvlakken

P.W.H. Lemmens

1. HET BEGRIP VEELVLAK

We weten dat het oppervlak van een kubus bestaat uit 6 vierkanten, dat van een tetraëder uit 4 driehoeken, dat van een prisma uit 2 driehoeken en 3 rechthoeken, dat van een Egyptische piramide uit 4 driehoeken en 1 vierkant, dat van een regelmatig twaalfvlak uit 12 vijfhoeken.

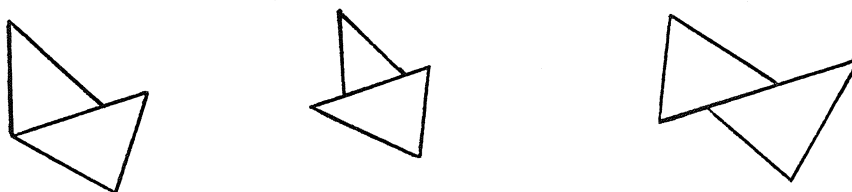
Al deze figuren noemen we *veelvlakken*. Ze hebben met elkaar gemeen dat ze opgebouwd zijn uit *vlakke convexe veelhoeken* die op een *nette* manier aan elkaar vastzitten.

In de nu volgende definitie geven we aan welke bouwsels van vlakke convexe veelhoeken we met de naam 'veelvlak' zullen betitelen. Daarbij letten we er speciaal op, hoe de veelhoeken in ribben en hoekpunten aan elkaar vastzitten.

DEFINITIE 1.1. Een *veelvlak* in de ruimte is de vereniging van een eindig aantal vlakke convexe veelhoeken zodat voldaan is aan:

1. Twee veelhoeken hebben als eventuele doorsnede hetzij één gemeenschappelijk hoekpunt, hetzij één gemeenschappelijke ribbe.
2. Elke ribbe is gemeenschappelijke ribbe van precies twee veelhoeken.
3. De in een hoekpunt samenkomende ribben zijn cyclisch te ordenen op zo'n manier dat elk tweetal opvolgende toebehoren aan een veelhoek.
4. Het veelvlak vormt een samenhangende verzameling.

Commentaar. De definitie is zo gekozen dat een veelvlak voldoet aan de eisen die men in de topologie oplegt aan een gesloten oppervlak: Elk punt moet een omgeving hebben die homeomorf is met een open schijfje van \mathbb{R}^2 . Zonder eis 3 zouden bijvoorbeeld twee tetraëders met precies één gemeenschappelijk hoekpunt ook een veelvlak vormen. In dat gemeenschappelijk hoekpunt heeft deze figuur echter niet het karakter van een oppervlak, want een kleine omgeving van dit hoekpunt (dat we even A zullen noemen) wordt on samenhangend als A weggelaten wordt. Bij een open schijfje in \mathbb{R}^2 kan zo iets niet gebeuren. Wat de eerste eis betreft, merken we nog op dat het *niet* toegestaan is dat twee veelhoeken slechts een *stuk* van twee ribben gemeen hebben, zoals in onderstaande tekeningen.



In definitie 1.1 is sprake van vlakke convexe veelhoeken. We laten nu zien wat we daarmee precies bedoelen.

Een figuur in \mathbb{R}^3 heet convex als met elk tweetal punten A en B ook hun verbindingslijnstuk AB geheel tot de figuur behoort. Elk punt X van AB is te beschrijven als $X = tA + sB$ met $t, s \in \mathbb{R}$, $t \geq 0, s \geq 0$, en $t + s = 1$. Heeft men in een convexe figuur in \mathbb{R}^3 m punten A_1, \dots, A_m dan blijkt met inductie dat tot die convexe figuur ook alle punten X behoren die te beschrijven zijn als een convexe som in de A_i 's, dat wil zeggen

$$X = \sum_{i=1}^m \alpha_i A_i \text{ met } \alpha_i \in \mathbb{R}, \alpha_i \geq 0, \text{ en } \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1.$$

Anderzijds toont men gemakkelijk aan dat de verzameling van alle convexe sommen in de A_i 's een convexe figuur is. Het is dus de minimale convexe figuur die de punten A_1, \dots, A_m bevat, ook wel genoemd het convexe omhulsel van A_1, \dots, A_m . We geven nu de definitie.

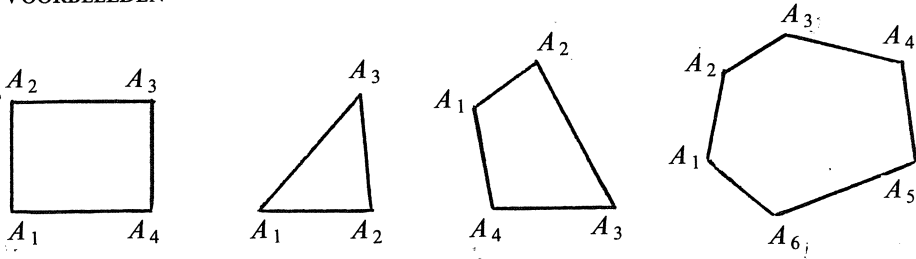
DEFINITIE 1.2. Een vlakke convexe m -hoek in de ruimte \mathbb{R}^3 is het convexe omhulsel van een m -tal ($m \geq 3$) punten A_1, \dots, A_m , alle gelegen in een tweedimensionaal vlak, en zó dat geen van de A_i in het convexe omhulsel van de overige ligt.

In een situatie als in definitie 1.2 heten de A_i 's de *hoekpunten* van de m -hoek. Door eventuele hernoeming van de hoekpunten kan bereikt worden dat de *rand* van de m -hoek (gezien in het vlak waarin hij ligt) bestaat uit de verbindingslijnstukken

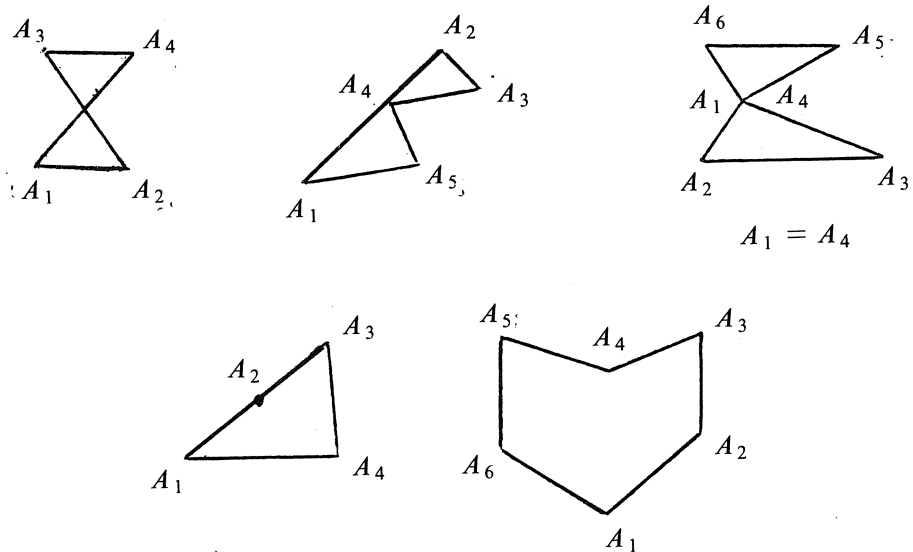
$$A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{m-1}A_m, A_mA_1.$$

Deze lijnstukken heten de *ribben* van de m -hoek. De overige verbindingslijnstukken tussen twee hoekpunten zullen we *diagonalen* noemen. Na deze hernoeming geven we de m -hoek ook wel verkort weer door $A_1A_2A_3 \cdots A_m$.

VOORBEELDEN



NON-VOORBEELDEN



OPMERKING 1.3

1. In definitie 1.2 hebben we de convexiteit van een vlakke veelhoek op een bepaalde manier geformuleerd. In de literatuur komen we ook wel andere formuleringen van het begrip convexe vlakke m -hoek tegen. Een heel gebruikelijke manier is die, welke gebruik maakt van doorsnijding van halfvlakken.
2. Het is ook mogelijk om de convexiteitseis te laten vallen. In dat geval zou men een n -hoek kunnen definiëren als een compact deel van een vlak, dat begrensd wordt door een gesloten polygoon met n hoekpunten en zonder zelfdoorsnijdingen. De twee laatste non-voorbeelden zouden dan ook veelhoeken voorstellen. De reden dat we niet voor deze laatste aanpak gekozen hebben zal pas duidelijk blijken in § 3, waar we ingaan op de relaties tussen veelvlakken en hun netwerken: In een veelvlak waarvan de

samenstellende veelhoeken niet convex zijn, kunnen twee veelhoeken eventueel meerdere gemeenschappelijke ribben en hoekpunten hebben. Dit geeft dan onnodige complicaties.

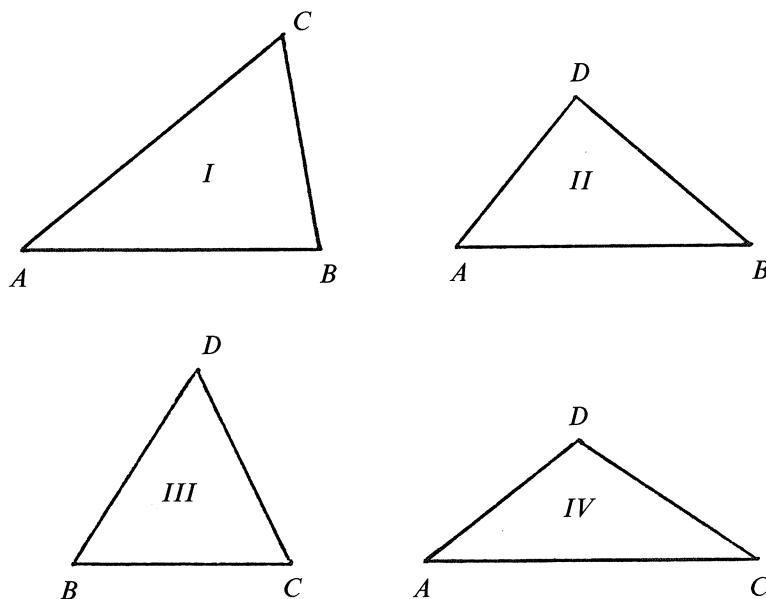
3. In definitie 1.1 hebben we wel aangegeven aan welke eisen een veelvlak moet voldoen, maar daarmee weten we nog niet hoe het er uitziet. Een precieze beschrijving van een veelvlak levert in het algemeen zoveel problemen op, dat er naar alternatieve mogelijkheden gezocht moet worden. Naast het verschaffen van een echt model biedt de *bouwplaat* een goede mogelijkheid. Hieraan zullen we in de volgende paragraaf aandacht besteden.

2. NETWERKEN

Zoals we in § 1 reeds aangekondigd hebben, is het verschaffen van een bouwplaat van een veelvlak een hulpmiddel om over dat veelvlak te kunnen praten. Gebruikelijk is om in plaats van bouwplaat te spreken van neerslag, uitslag of *netwerk*.

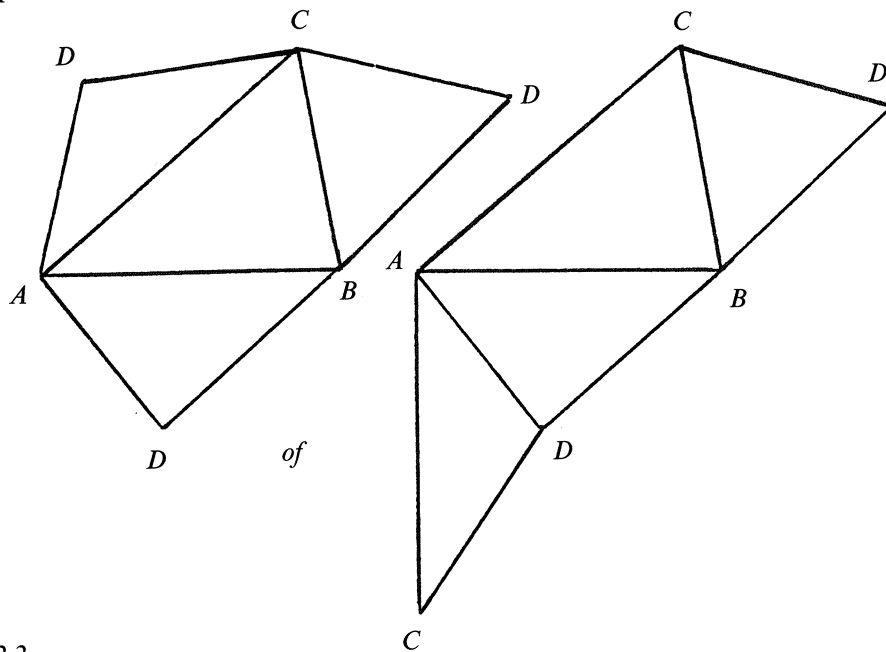
2.1

Een *netwerk van een veelvlak* bestaat uit de in het platte vlak getekende collectie van al zijn opbouwende vlakke veelhoeken *op ware grootte*, waarbij precies aangegeven is (bijvoorbeeld door de benaming van de hoekpunten) hoe zij in het veelvlak aan elkaar gehecht zijn. Zo bestaat het netwerk van een tetraëder met hoekpunten A, B, C, D uit de volgende collectie driehoeken:



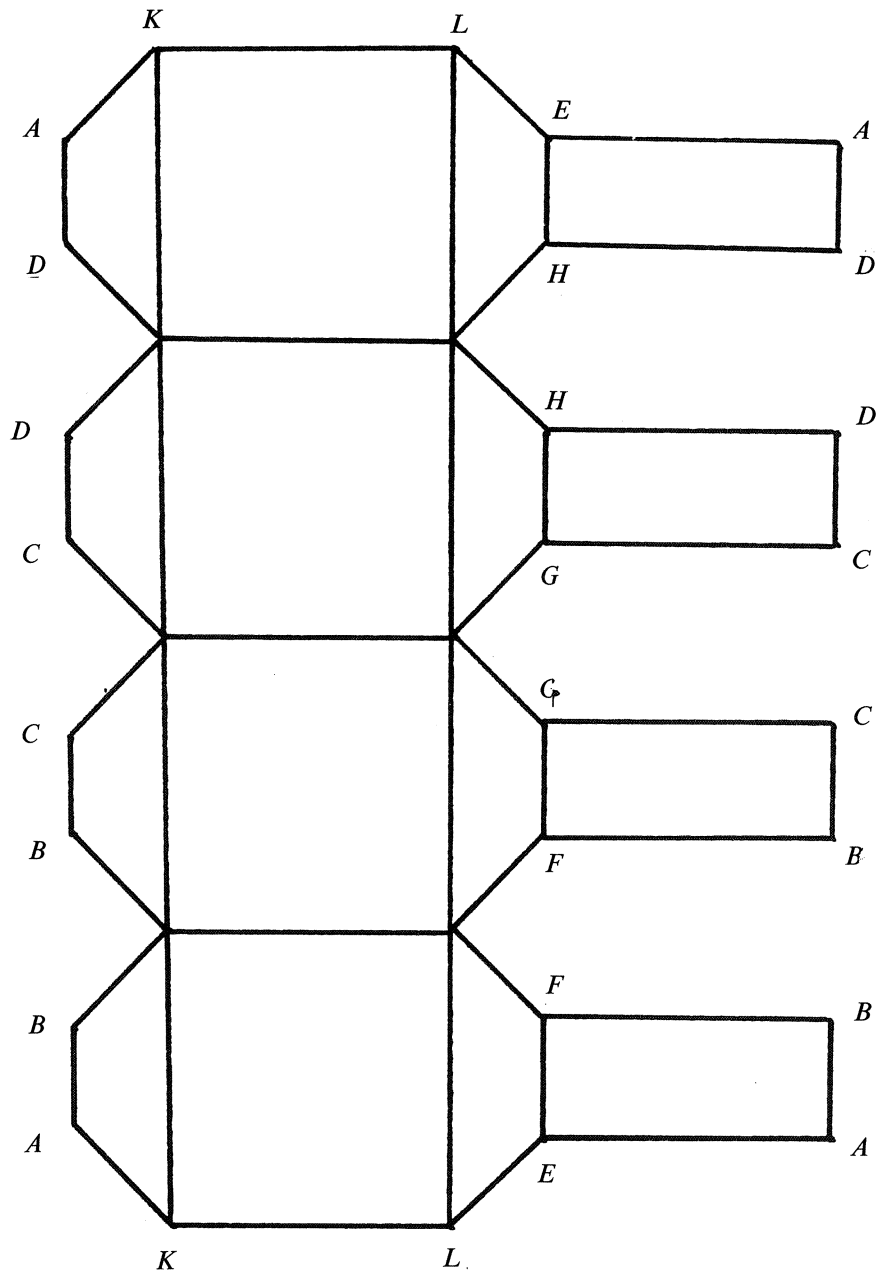
Bij de reconstructie van het tetraëder uit dit netwerk wordt de ribbe AC van I vastgemaakt aan de ribbe AC van IV, en wel zó dat de twee hoeken A op elkaar en ook de twee hoeken C op elkaar komen. Dit procédé wordt op alle ribben toegepast.

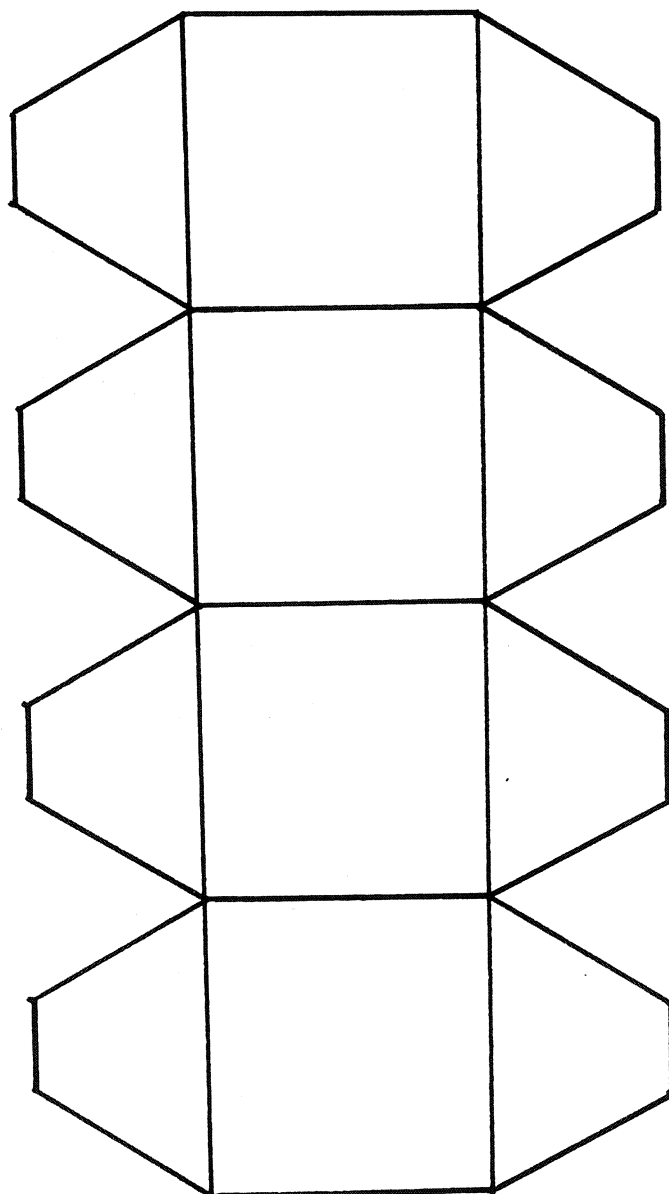
In het algemeen zal men er de voorkeur aan geven om zoveel mogelijk 'in werkelijkheid' aan elkaar vastzittende veelhoeken ook in het netwerk reeds aan elkaar te tekenen, echter *zonder daarbij tot overlappingen te komen!* In die opzet kan het bovenstaande netwerk onder andere vervangen worden door:

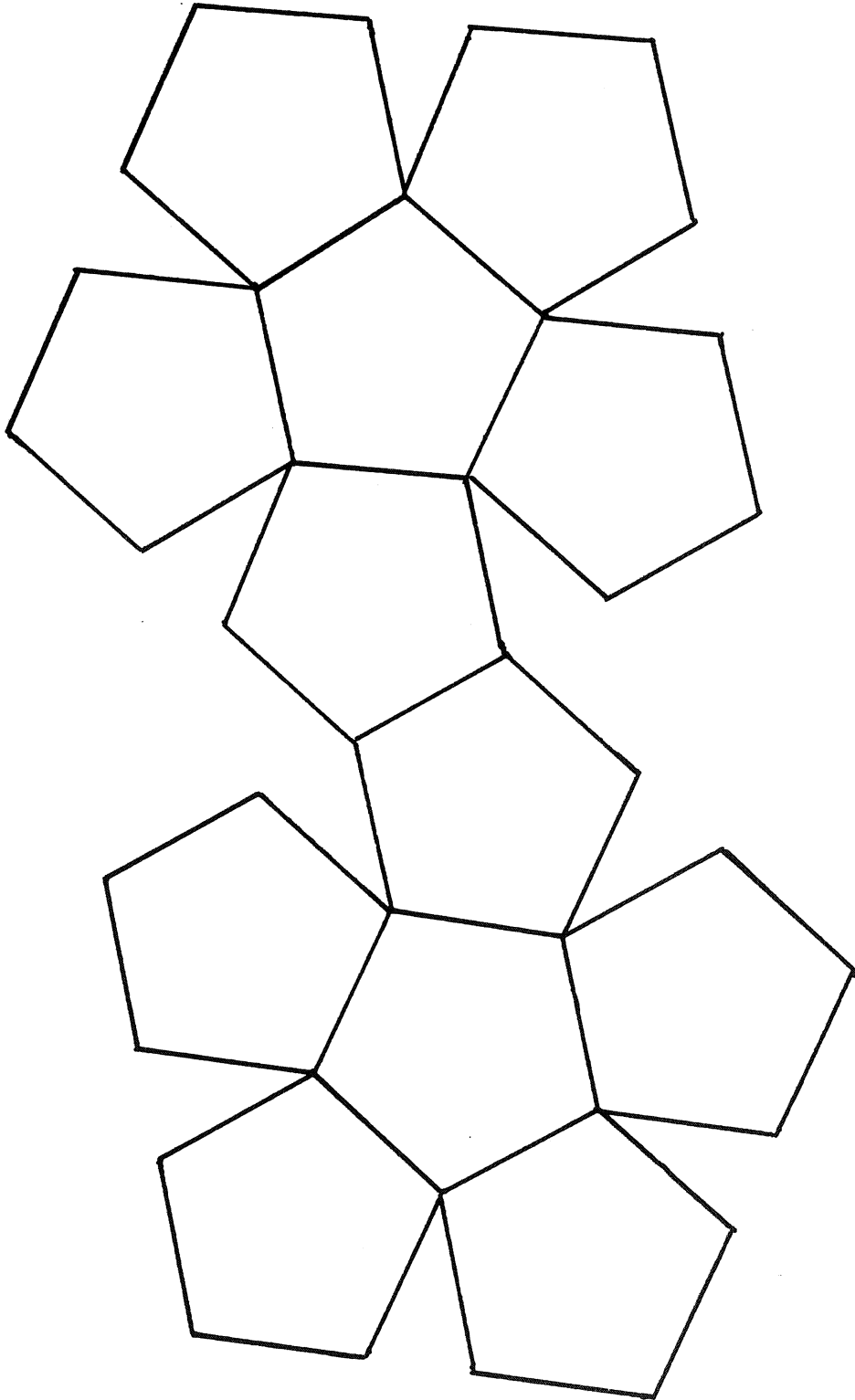


2.2

Op de volgende bladzijden zijn een aantal netwerken opgenomen van meer of minder bekende veelvlakken. De geïnteresseerde lezer wordt geadviseerd ze over te nemen en uit te knippen en er daadwerkelijk een model van het veelvlak uit te construeren! Bij de laatste twee netwerken is de aanhechting niet voorgeschreven, zodat de lezer zelf kan experimenteren.







2.3

Netwerken zijn bijzonder nuttig bij het construeren van veelvlakken met vooraf gegeven eigenschappen. Dit moge blijken uit de collectie opgaven in 2.4 en 2.5, overgenomen uit boeken die destijds bij het Middelbaar Onderwijs in gebruik waren voor het vak Stereometrie.

2.4

Uit: Stoelinga en Van Tol, Wiskunde-Opgaven, 5de druk, Zwolle 1949.

Meetkunde

8. Van een regelmatige vierzijdige piramide is de ribbe van het grondvlak a en de straal van de bol die alle ribben aanraakt $\frac{5}{8}a$. Construeer het netwerk van die piramide.
24. Van een viervlak zijn gegeven het grondvlak in ware gedaante, de projectie van de top op het grondvlak en de straal van de omschreven bol. Construeer het netwerk van dit viervlak.
41. Van een viervlak $ABCD$ is het grondvlak ABC in ware gedaante gegeven. Construeer de uitslag als ook nog gegeven is dat in het viervlak een rechte cirkelkegel beschreven kan worden met een halve tophoek van 30° .
53. Van een viervlak is gegeven: het grondvlak in ware gedaante en de drie zwaartelijnen uit de hoekpunten van het grondvlak in ware lengte. Construeer het netwerk.
114. Van een vierzijdige piramide $ABCD$ is het grondvlak in ware gedaante gegeven. Verder zijn gegeven: de hoogte, de opstaande ribbe TD en de lijn die B verbindt met het midden E van TD . Construeer het netwerk van de piramide.
155. Van het viervlak $ABCD$ zijn gegeven in ware grootte: het grondvlak ABC , de hoogte DD_1 en de beide zwaartelijnen AZ_1 en BZ_2 . Construeer het netwerk van het viervlak.
191. In viervlak ABC kan een rechte cirkelkegel beschreven worden; deze kegel geeft bij ontwikkeling een cirkelsector met een middelpuntshoek van 120° . Construeer van dit viervlak het netwerk en de hoek tussen twee kruisende ribben, als het grondvlak in ware gedaante gegeven is.
198. Van het viervlak ABC kruisen AC en BD elkaar loodrecht, evenals AB en DC . Het grondvlak is in ware gedaante gegeven, de ribbe AD in lengte. Men vraagt het netwerk te construeren en daarin de standhoek tussen twee opstaande zijvlakken.
230. Van viervlak $ABCD$ is gegeven, dat AB en CD elkaar loodrecht kruisen. Construeer het netwerk, als gegeven zijn: de ware gedaante van het grondvlak ABC , de hoogte van het viervlak en de afstand van AB en CD .

2.5

Uit: Dr. P.M. van Hiele en Dr. D. van Hiele-Geldof, Werkboek der Stereometrie, 3de druk, Purmerend 1961.

1. Gegeven is de regelmatige zeszijdige piramide $T.ABCDEF$, waarvan het grondvlak een ribbe heeft van 3 cm en waarvan de hoogte 5 cm is.
 - a. Construeer het netwerk van deze piramide.
 - b. Construeer de kortste weg over het oppervlak van het hoekpunt A naar het midden van TC .
2. a. Teken het netwerk van een regelmatige vierzijdige piramide, waarvan de grondvlaksribbe 6 cm en de hoogte 4 cm is.
 - b. Construeer de hoek die twee opstaande zijvlakken met elkaar maken.
3. a. Construeer het netwerk van het driezijdige prisma $ABC.A_1B_1C_1$, waarvan $\overline{AB} = 3$ cm, $\overline{BC} = 2\frac{1}{2}$ cm, $\overline{CA} = 4$ cm, $\overline{AA_1} = 5$ cm, $\angle ABB_1 = 120^\circ$, $\angle CBB_1 = 90^\circ$.
 - b. Neem bovengenoemd netwerk over op tekenpapier, knip het uit en onderzoek of het klopt.
4. Maak een uitslag van een afgeknot driezijdig prisma.
5. Maak een uitslag van een parallellepipedum.

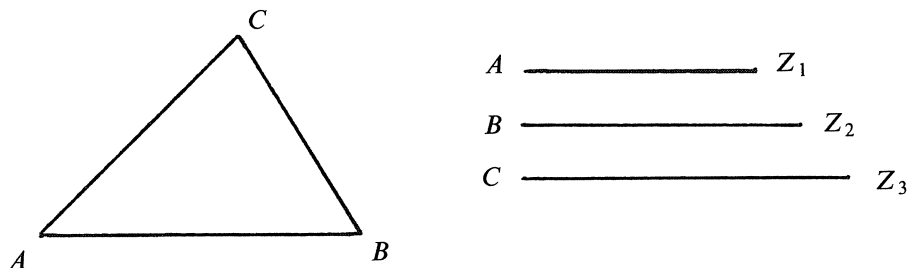
2.6

We zullen trachten de bedoeling van de vraagstukken in 2.4 en 2.5 toe te lichten aan de hand van vraagstuk 53 uit Stoelinga en Van Tol (2.4):

Van een viervlak is gegeven: het grondvlak in ware gedaante en de drie zwaartelijnen uit de hoekpunten van het grondvlak in ware lengte. Construeer het netwerk.

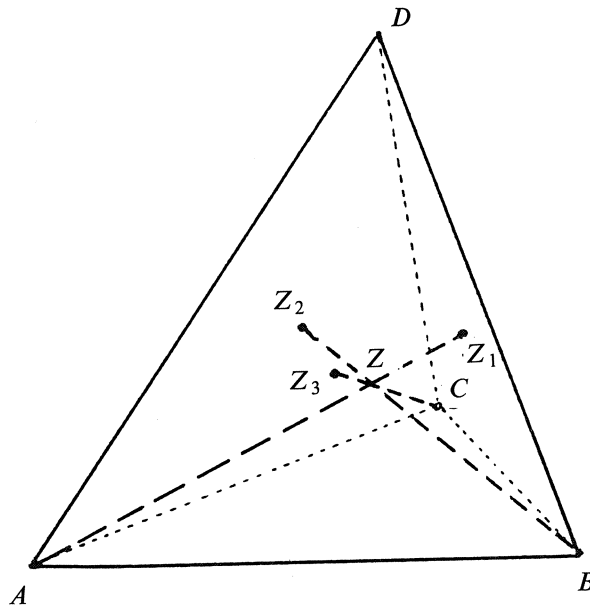
De leerling heeft als instrumenten tot zijn beschikking: een potlood, een liniaal, een passer en een driehoek. Hij mag de liniaal gebruiken om een lijn door twee punten te trekken. Het is echter verboden om met behulp van de liniaal afstanden over te brengen, dat moet met de passer gebeuren. De driehoek wordt alleen gebruikt om door verschuiven langs de liniaal evenwijdige lijnen te tekenen.

De gegevens zijn in een tekening als volgt weergegeven:

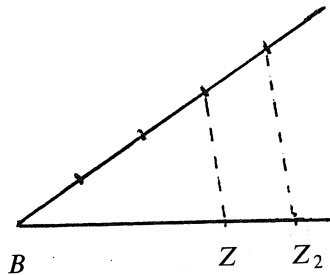


Men moet zich hierbij realiseren dat er een uitgebreide notatie-conventie was: Een viervlak had altijd de hoekpunten A, B, C, D , met ABC als grondvlak en D als top. Notatie $ABCD$ of suggestiever ABC^D . De zwaartepunten van de driehoeken BCD, ACD, ABD zijn hier aangegeven door resp. Z_1, Z_2, Z_3 .

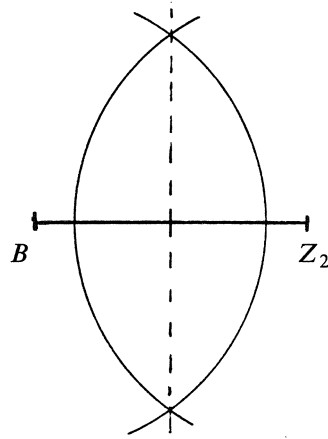
Behalve een aantal stellingen heeft de oplosser ook een behoorlijk ruimtelijk inzicht nodig. Om het vraagstuk te kunnen oplossen, moet men namelijk eerst een analyse van het probleem maken. Hierbij deduceert men uit een ruimtelijke schets een mogelijke constructie:



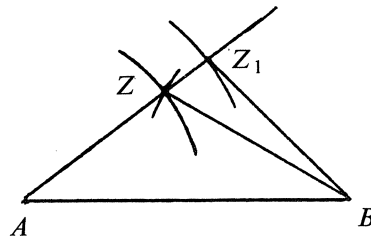
Zij Z het zwaartepunt van $ABCD$ (het snijpunt van de zwaartelijnen). Omdat de lengten van AB, AZ_1 en BZ_2 gegeven zijn, kan men de driehoek ABZ op ware grootte tekenen (immers $|AZ| = \frac{3}{4}|AZ_1|$ en $|BZ| = \frac{3}{4}|BZ_2|$ (stelling)). De verhouding $\frac{3}{4}$ brengt men door middel van de evenredigheidstransformatie over,



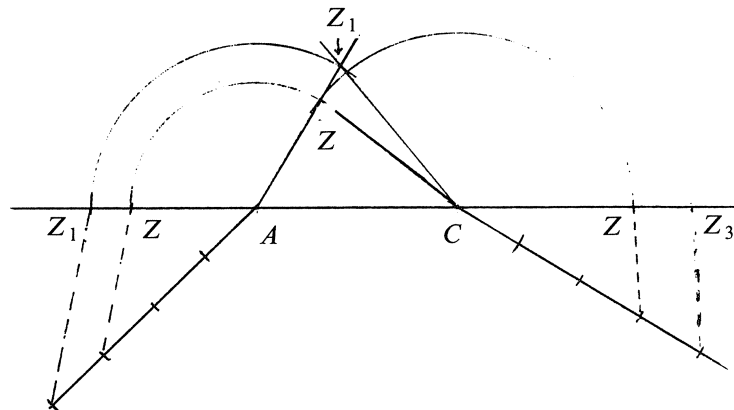
waarbij op de hulprechte (hier schuin naar boven getekend) door B vier gelijke stukken zijn afgepast (alternatief kan men in dit speciale geval natuurlijk ook het gewenste resultaat bereiken door BZ_2 tweemaal in twee helften te delen met de passerconstructie:



Daar de punten A, B, Z, Z_1 in één vlak liggen, kan men nu BZ_1 op ware grootte tekenen, door AZ_1 langs AZ af te passen en BZ_1 te trekken:

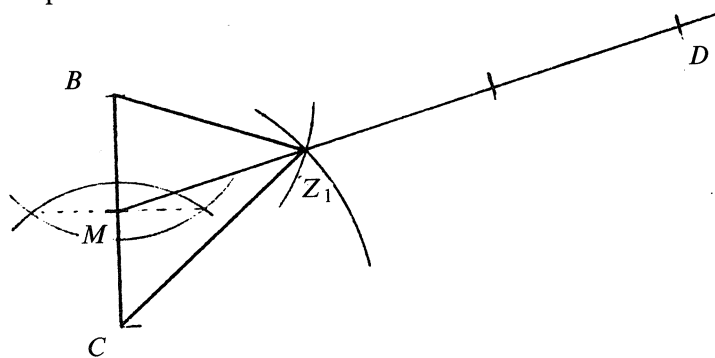


Volkomen analoog, door uit te gaan van de driehoek ACZ , kan men CZ_1 op ware grootte construeren.



(In deze tekening laten we meteen zien hoe verschillende constructies in één figuur uitgevoerd worden).

Men heeft nu alle zijden van driehoek BCZ_1 op ware grootte en deze driehoek kan op ware grootte getekend worden. Daar deze driehoek in één vlak ligt met BCD , kan men hierin de ligging van D construeren door vanuit het midden M van BC een lijn te trekken door Z_1 en daarop MZ_1 vanuit M drie-maal af te passen.



Nu heeft men ook de beschikking over de ware grootte van BD en CD .

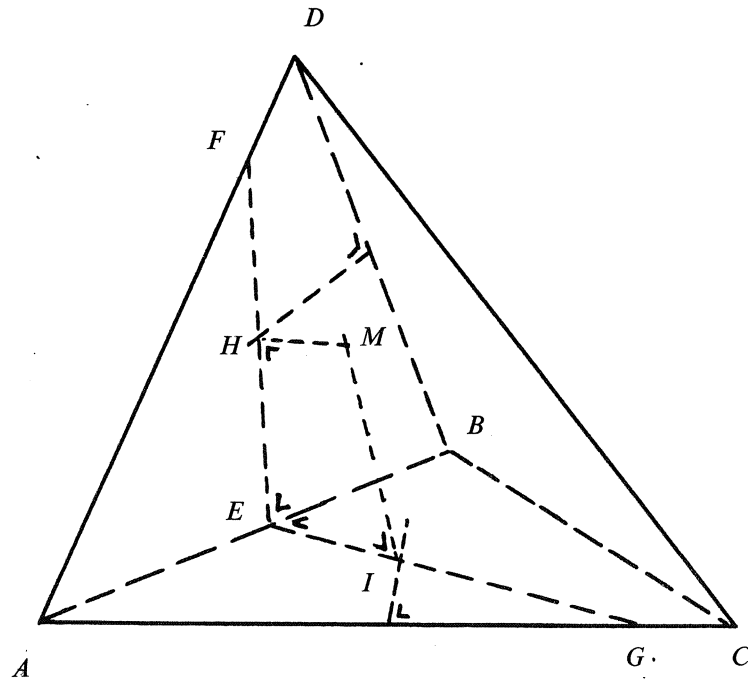
Tenslotte kan de ware grootte van AD geconstrueerd worden door op te merken dat A, M, Z_1, D alle in één vlak liggen, terwijl men beschikt over de ware grootte van AZ_1 , van MZ_1 , van AM (immers de driehoek ABC is gegeven) en van MD . Men construeert dus eerst de driehoek AMZ_1 en past vervolgens MD langs MZ_1 af. Het gevraagde netwerk kan nu geconstrueerd worden door de grootte van AD, BD, CD om te cirkelen van respectievelijk de hoekpunten A, B, C van driehoek ABC en de passende snijpunten van deze cirkels op te zoeken.

2.7

In het voorgaande hebben we uitgebreid laten zien hoe het netwerk van een veelvlak geconstrueerd kan worden met passer, liniaal en driehoek, uitgaand van gegeven eigenschappen. Interessanter zijn eigenlijk vraagstukken waarbij het niet louter om het netwerk gaat maar waarbij het netwerk een rol speelt. Als voorbeeld nemen we:

Van een viervlak $ABCD$ is het netwerk gegeven. Gevraagd wordt de straal van de omgeschreven bol (gaande door de vier hoekpunten) te construeren.

Een eerste analyse van dit vraagstuk zou als volgt kunnen zijn:



Allereerst stellen we vast dat het middelpunt M van de omgeschreven bol het snijpunt is van de middelloodvlakken van AB , BD en AC . In de driehoeken ABD en ABC construeren we de middelloodlijnen van AB (noem E het midden van AB) en bepalen hun snijpunten F , G respectievelijk met AD en AC .

Door in driehoek ACD te kijken, kunnen we de grootte van FG bepalen. Aangezien nu van EFG alle zijden bekend zijn, kan EFG in ware gedaante getekend worden. Door in de driehoeken ABD en ABC ook de middelloodlijnen van BD en AC te construeren, vinden we als respectievelijke snijpunten met EF en EG de middelpunten H en I van de omgeschreven cirkels van ABD en ABC . Deze kunnen we overzetten in de ware gedaante van EFG .

In EFG vinden we nu punt M als snijpunt van de loodlijnen op EF en EG met voetpunten respectievelijk H en I . Immers, deze loodlijnen zijn de snijlijnen van de middelloodvlakken van BD en AC met het middelloodvlak EFG van AB .

De gevraagde straal van de omgeschreven bol is nu de grootte van de hypotenusa van een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden IM en IC , want IM staat loodrecht op ABC .

De uitvoering van de benodigde constructies laten we aan de lezer over.

2.8

Andere vraagstukken waarbij een netwerk nuttige diensten kan verlenen zijn die, waarbij gevraagd wordt naar de ware doorsnede van een vlak met een veelvlak. Als voorbeeld moge dienen:

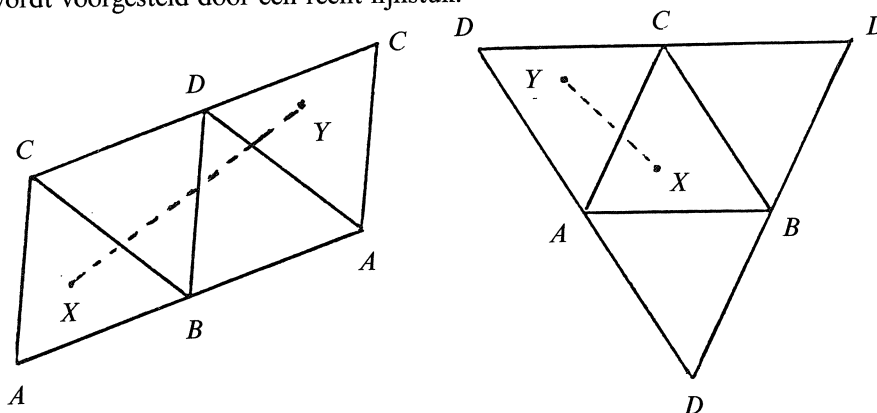
Van een regelmatige vierzijdige piramide $TABCD$ zijn de opstaande ribben 8 cm en de ribben van het grondvlak 4 cm lang. Construeer de ware doorsnede van deze piramide met een vlak V dat TA, TB, TC snijdt in respectievelijk E, F, G zó dat $TE = 5$ cm $TF = 4$ cm en $TG = 6$ cm.

Ook hierbij kan een analyse vooraf niet gemist worden. We laten een en ander aan de lezer over!

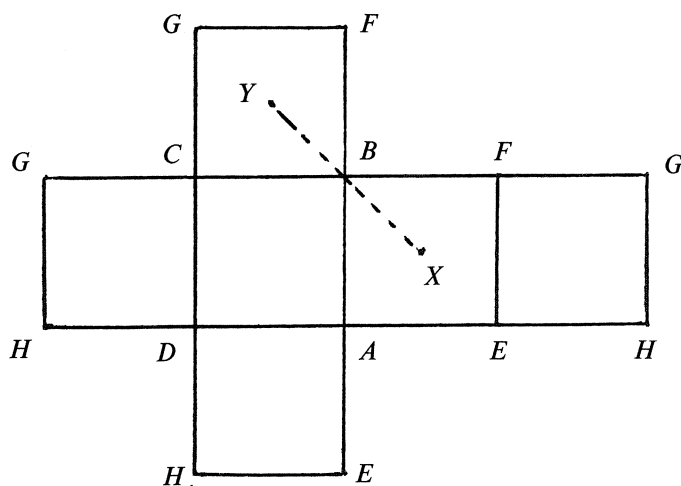
2.9

Als laatste elementaire toepassing van netwerken noemen we het bepalen van de kortste afstand, *gemeten over het veelvlak*, tussen twee punten van het veelvlak. Hierbij maakt men gebruik van het feit dat de kortste weg in een geschikte vorm van het netwerk verschijnt als een rechte lijn. Er doen zich hierbij verschillende problemen voor, zoals het nu volgende probeert te illustreren.

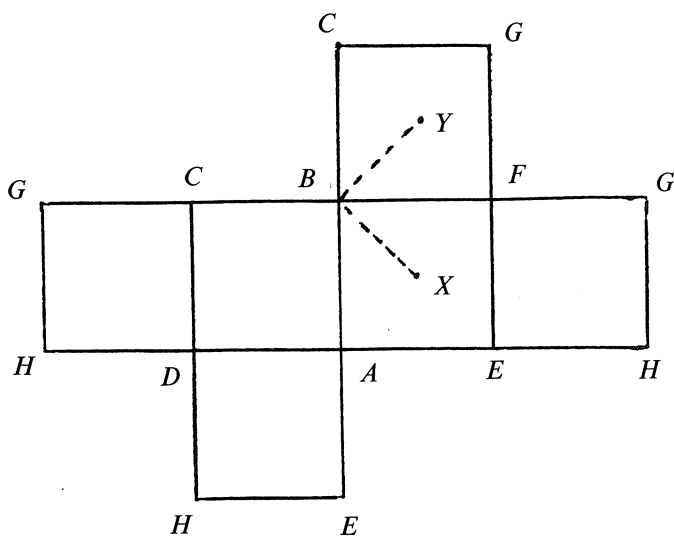
Als het mogelijk is in een netwerk van een veelvlak tussen twee punten X en Y een *aaneengesloten recht lijnstuk* XY te tekenen zodat geen hoekpunt op XY ligt, dan representeert XY een *relatief kortste weg* tussen X en Y over het veelvlak. Immers kleine afwijkingen worden in het netwerk gerepresenteerd door afwijkingen van de rechte lijn die echter langer zijn. A priori kan men echter niet beweren dat XY een absoluut kortste weg is, want het is denkbaar dat in een andere configuratie van het netwerk een kortere weg mogelijk is die wordt voorgesteld door een recht lijnstuk.



Als het lijnstuk XY in het netwerk door een hoekpunt gaat, dan kan bovenstaande redenering niet worden toegepast, omdat kleine afwijkingen ons buiten het netwerk kunnen brengen. Als illustratie bekijken we in de hierna-volgende figuur een netwerk van een kubus $\begin{matrix} EFGH \\ ABCD \end{matrix}$. Voor de punten X en Y nemen we respectievelijk de middelpunten van $ABFE$ en $BCGF$.



Tekenen we voor deze kubus echter een ander netwerk, waarin $ABFE$ en $BCGF$ aan elkaar grenzen volgens hun gemeenschappelijke ribbe BF , dan zien we dat er zich kleine afwijkingen (zo klein als men wil) van de boven-beschreven weg (die nu een knik in B vertoont) voordoen die korter zijn.



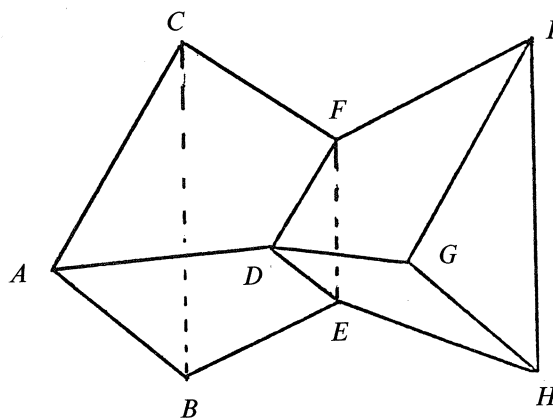
2.10

De redenering die hierboven opgezet is voor de kubus in het geval dat X en Y speciaal gekozen zijn, kan men veralgemenen tot:

Een relatief kortste weg over een veelvlak kan nooit lopen via een hoekpunt B waarvoor geldt dat de som van de binnenhoeken in B van de B bevattende veelhoeken kleiner is dan 2π .

2.11

Heeft men echter een situatie zoals in onderstaande (ruimtelijke) tekening, waarin twee afgeknotte regelmatige tetraëders samengevoegd zijn,

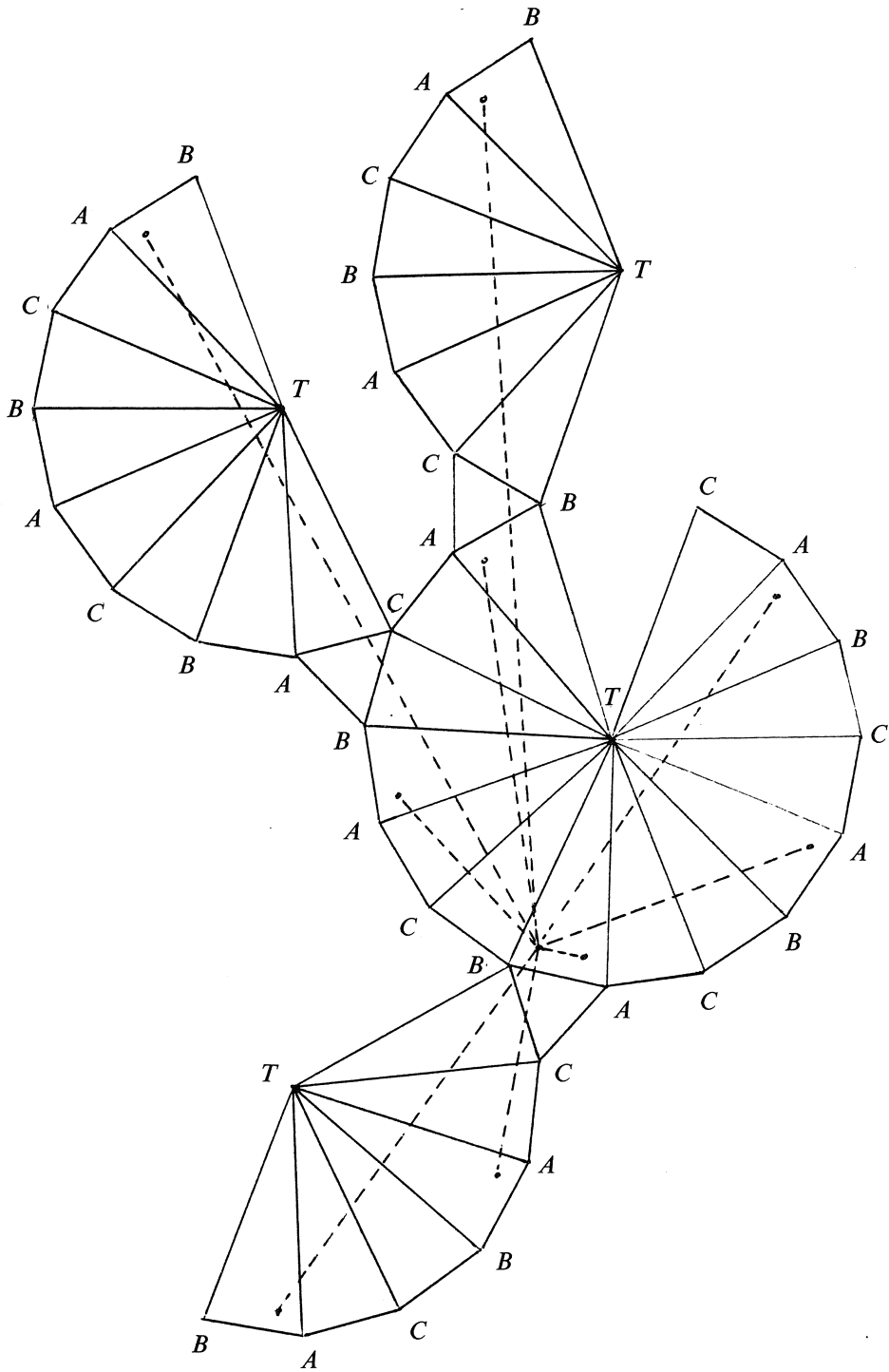


(DEF is geen veelhoek van het veelvlak!)

dan zijn de D bevattende veelhoeken $ABED$, $ACFD$, $DGIF$ en $DEHG$ en de som van hun binnenhoeken in D is $4 \times 120^\circ$ oftewel $8\pi/3$. Voor een punt X op de diagonaal DI en een punt Y in $ABED$ vormt het lijnstuk XD gevolgd door het lijnstuk DY een relatief kortste weg! De verificatie van deze bewering wordt aan de lezer overgelaten (netwerk!).

2.12

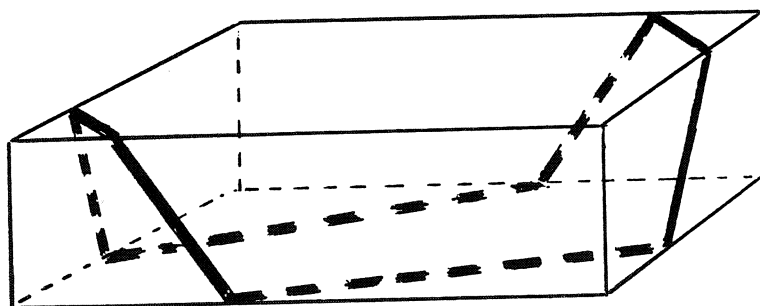
Om een relatief kortste weg over een veelvlak als een rechte lijn in een netwerk te kunnen tekenen, moet men soms het netwerk 'periodiek' uitbreiden: Bepaalde veelhoeken kunnen dan vaker in de tekening voorkomen. Als illustratie bekijken we het probleem van de relatief kortste wegen tussen twee punten op een driezijdige piramide ABC^T met kleine tophoek. Een relatief kortste weg kan een veelhoek vaker aandoen. Op de volgende bladzijde is een aantal relatief kortste wegen tussen twee vaste punten op ABC^T gerepresenteerd. Probeer ze in werkelijkheid voor te stellen!



2.13

In het meetkundenummer van Euclides (50ste jaargang, 1974/1975, no. 4/5) vinden we op blz. 166 de volgende opgave:

Om een doosje is een elastiekje gespannen als aangegeven in de figuur



Wat is de lengte van het gespannen elastiekje uitgedrukt in de lengten van de ribben? (Voor een uitwerking hiervan zie men ook Pythagoras, jaargang 15, no. 1 (oktober 1975)).

3. OVER HET VERBAND TUSSEN VEELVLAKKEN EN NETWERKEN

Vanzelfsprekend heeft ieder veelvlak een netwerk. Een voor de hand liggende vraag is dan of ook het omgekeerde geldt: Heeft ieder netwerk een realisering als veelvlak? Anders gezegd: Is er bij ieder netwerk een veelvlak zodat dat netwerk een netwerk is van dat veelvlak?

Op dit ogenblik is deze vraag nog zinloos, omdat we het begrip netwerk niet los van een veelvlak gedefinieerd hebben. We proberen dit nu te doen en wel op een zodanige manier dat zoveel mogelijk rekening wordt gehouden met de aan een netwerk te stellen voorwaarden in verband met definitie 1.1 betreffende een veelvlak.

DEFINITIE 3.1. Een eindige verzameling in het platte vlak getekende veelhoeken, elk convex en met drie of meer hoekpunten, heet een *netwerk* als tevens door middel van de benaming van de hoekpunten een identificatie gegeven is (gelijkgenaamde hoekpunten worden als dezelfde beschouwd) die voldoet aan de volgende eisen:

- (i) Hoekpunten van een veelhoek zijn altijd verschillend.
- (ii) Bij elke veelhoek V en elke *ribbe* AB van V is er precies één andere veelhoek W die ook een *ribbe* AB heeft.
- (iii) Twee verschillende veelhoeken hebben hoogstens twee dezelfde hoekpunten. Als ze twee dezelfde hoekpunten X en Y hebben, dan is XY in *beide* veelhoeken een *ribbe* en deze ribben hebben *dezelfde lengte*.
- (iv) Voor ieder hoekpunt A is de collectie van alle veelhoeken die een hoekpunt A hebben cyclisch te ordenen en wel zodanig dat elke twee

opeenvolgende veelhoeken nog een van A verschillend hoekpunt gemeen hebben.

- (v) Bij elk tweetal veelvlakken V en W is een keten van veelvlakken

$$V = V_1, V_2, \dots, V_m = W$$

zodat elk tweetal opvolgende tenminste een hoekpunt gemeen hebben.

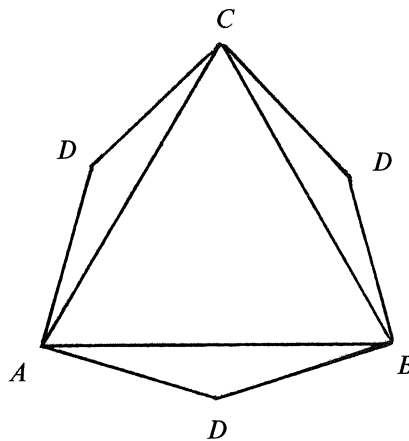
Toelichting. We vertrouwen er op dat de lezer zelf het verband ziet tussen de eisen 1, 2, 3, 4 van definitie 1.1 en respectievelijk de eisen (iii), (ii), (iv), (v) van definitie 3.1.

3.2

Omdat we in 3.1 aan een netwerk eisen hebben gesteld die alle voorwaarden in 1.1 voor een veelvlak weerspiegelen, is het zinvol om opnieuw de vraag aan het begin van deze paragraaf te stellen:

Is ieder netwerk realiseerbaar in een veelvlak?

Het antwoord op deze vraag is ontkennend, hetgeen men inziet bij bijvoorbeeld het volgende netwerk, bestaande uit 4 driehoeken zodat ABC gelijkzijdig is en de overige driehoeken gelijkbenig zijn met tophoek D steeds 150° .



Analyseren we in dit voorbeeld de oorzaken van de niet-realiseerbaarheid, dan blijkt dat bovendien de volgende eisen aan het netwerk gesteld moet worden.

3.3

Voor elk hoekpunt X moet gelden:

- a. Als V_1, \dots, V_m de veelhoeken zijn die X als hoekpunt hebben en is ϕ_i de binnenhoek van V_i in X , dan is

$$\phi_i \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \phi_j \quad \text{voor elke } i = 1, \dots, m$$

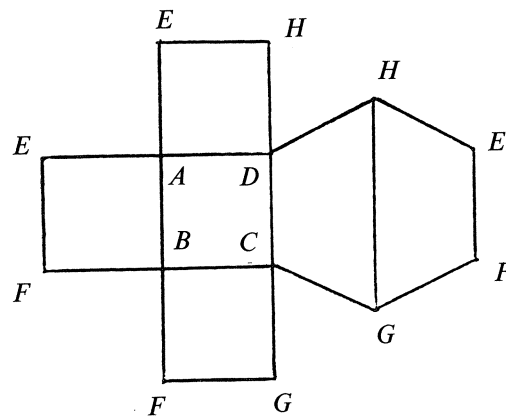
- b. Indien in a. het aantal m precies 3 is, dan geldt bovendien

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 \leq 360^\circ.$$

Toelichting. Voorwaarde a. kan opgevat worden als een driehoeksongelijkheid voor hoeken. Voorwaarde b. volgt onmiddellijk uit de overweging dat een drievlakshoek er altijd uitziet als de drievlakshoek bij de top van een tetraëder. Bij het in 2.11 aangegeven veelvlak ziet men dat *voorwaarde b. niet hoeft te gelden voor hoekpunten die gemeenschappelijk zijn aan meer dan drie veelhoeken* (kijk in 2.11 naar de situatie bij hoekpunt F).

3.4

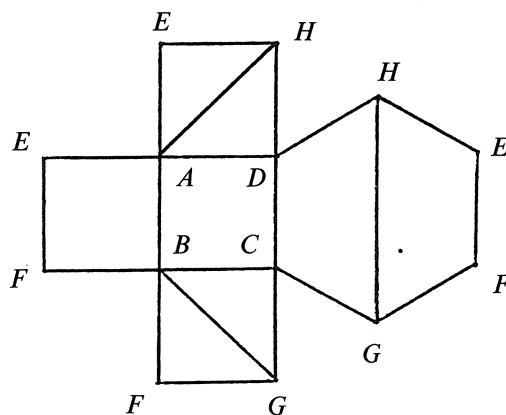
Echter, ook wanneer een netwerk voldoet aan de eisen 3.3a en b, is nog niet gegarandeerd dat het realiseerbaar is als veelvlak. Als voorbeeld bekijkt men het volgende netwerk, bestaande uit vier vierkanten en twee trapezia. Met enig ruimtelijk inzicht ziet men in dat de vier vierkanten reeds zorgen voor de onderlinge ligging van de hoekpunten zoals bij een kubus, zodat de trapezia niet meer aangehecht kunnen worden. Toch verifieert men eenvoudig dat het netwerk voldoet aan alle eisen van 3.1 en 3.3.



Men vergelijk ook de bijdrage ‘Tien jaar later’ van G.R. Veldkamp.

3.5

Alhoewel bovenstaand netwerk niet realiseerbaar is als veelvlak, is het met betrekkelijk weinig veranderingen wel om te vormen tot een realiseerbaar netwerk: men hoeft slechts twee extra 'vouwlijnen' aan te brengen om dit te verwezenlijken. Hiervoor kunnen bijvoorbeeld AH en BG gekozen worden. Dan ontstaat een netwerk bestaande uit twee vierkanten, twee trapezia en vier driehoeken.



3.6

In 3.4 en 3.5 hebben we kennis gemaakt met het fenomeen dat een netwerk door het aanbrengen van een verfijning t.a.v. zijn veelhoeken realiseerbaar kan worden. Duidelijk zal zijn dat verfijning nooit het omgekeerde resultaat kan hebben. Het is de schrijver niet bekend of verfijning altijd leidt tot realiseerbaarheid. Wel is uit de *combinatorische topologie* het volgende resultaat bekend.

STELLING 3.7. Een netwerk (zie def. 3.1) waarvan de veelhoeken uitsluitend *driehoeken* zijn, is pseudo-realiseerbaar in \mathbb{R}^5 .

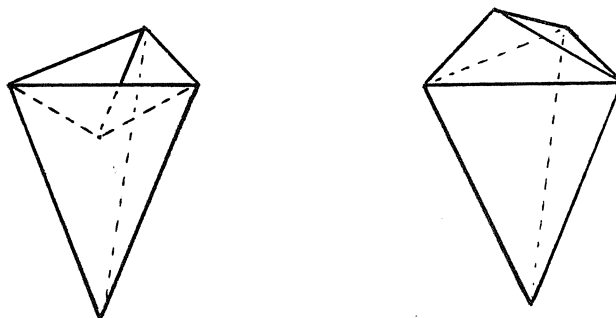
Hiermee bedoelen we dat er in \mathbb{R}^5 een veelvlak bestaat (lees in definitie 1.2 \mathbb{R}^5 i.p.v. \mathbb{R}^3) waarvan alle veelhoeken vlakke driehoeken zijn die precies zo aan elkaar zitten als het gegeven netwerk aangeeft. De driehoeken van dit veelvlak hoeven echter niet dezelfde vorm of grootte te hebben als die van het netwerk. Voor het bewijs en voor meer details verwijzen we naar § 1.9 (Abstract simplicial complexes) van [Hilton & Wylie].

3.8

Kunnen we in het algemeen de vraag naar de existentie van een veelvlak bij een gegeven netwerk niet positief beantwoorden, toch is er nog een belangrijk ander probleem dat om antwoord vraagt, namelijk:

Stel dat een netwerk realiseerbaar is als veelvlak, is dit veelvlak dan uniek bepaald?

Dat dit niet het geval hoeft te zijn, zien we bijvoorbeeld bij de volgende zesvlakken met identieke netwerken:



Hetzelfde fenomeen kan men aan een regelmatig 20-vlak (icosaëder) demonstreren. Daar kan men vijf driehoeken die in een punt samenkomen 'naar binnen flippen' zonder het netwerk te veranderen. Voor interessantere 'flip-flop veelvlakken' zie men Pythagoras, jaargang 20, no. 1 (1980), artikel van F. van der Blij.

Wel bestaat ten aanzien van deze probleemstelling een resultaat van Cauchy.

STELLING 3.9. Een netwerk behoort bij ten hoogste één *convex* veelvlak.

Hierbij verstaan we onder een *convex* veelvlak een veelvlak dat rand is van een convexe deelverzameling van \mathbb{R}^3 . Het bewijs van deze stelling is te lang om hier weer te geven, maar op belangrijke elementen ervan zullen we nog terug komen.

Fouten in Cauchy's bewijs (1813) zijn opgespoord en verbeterd door Hadamard en Steinitz. We merken hier wel op dat bij een *convex* veelvlak eis 3.3b in sterke vorm geldt, omdat de situatie bij een hoekpunt waarin m veelhoeken samenkomen er dan moet uitzien zoals bij de top van een m -zijdige piramide, dus:

3.10

Voor een *convex* veelvlak geldt in ieder hoekpunt X

- a. $\phi_i \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \phi_j$ voor elke $i = 1, \dots, m$
- b. $\sum_{j=1}^m \phi_j \leq 360^\circ$

Hierbij is, evenals in 3.3, m het aantal veelhoeken dat bij X samenkomt en ϕ_j is de binnenhoek van veelhoek V_j in hoekpunt X .

3.11

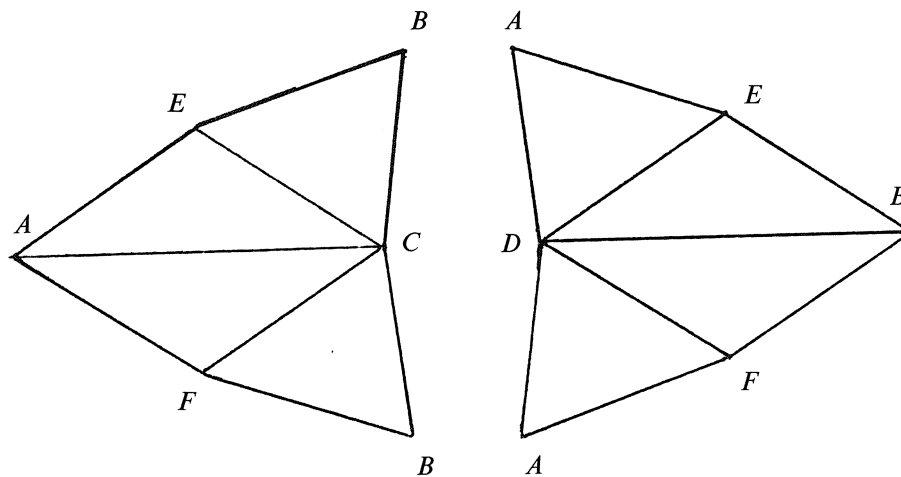
In feite hebben we zojuist gezien dat men door het geven van het netwerk van een convex veelvlak precies datzelfde veelvlak kan reconstrueren en geen ander (behalve dan misschien niet-convexe).

Wanneer men echter uitgaat van een niet-convex veelvlak, dan kunnen er gekke dingen gebeuren. Zo is het bijvoorbeeld bekend dat er *beweeglijke* veelvlakken zijn. We bedoelen hiermee dat de samenstellende veelhoeken niet van vorm veranderen, dat ook de manier waarop de veelhoeken aan elkaar zitten niet verandert en dat ondanks dat het veelvlak als geheel enigermate beweeglijk is.

Al lang bekend zijn beweeglijke octaëders *met zelfdoorsnijding* (Bricard, 1897). In de zin van definitie 1.1 zijn dit echter geen veelvlakken, maar in 1977 vond Connelly echte veelvlakken die beweeglijk zijn. Het bewijs van Connelly's vondst is te lang om hier op te nemen. Wie er meer van wil weten leze vooral zijn bijdrage in [Klarner]. Wel willen we benadrukken dat er dus blijkbaar netwerken zijn waarbij oneindig veel verschillende (niet-convexe) veelvlakken als realisering bestaan.

3.12

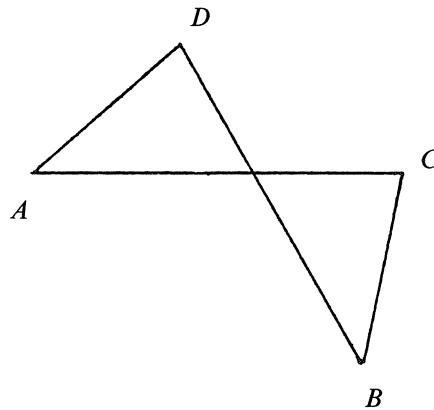
Als afsluiting van deze paragraaf geven we een beschrijving van een zichzelf doorsnijdend octaëder à la Bricard. Het netwerk van dit veelvlak ziet er als volgt uit



Hierin zijn alle driehoeken gelijkbenig, met een en dezelfde lengte voor elk paar gelijke ribben. Bovendien is

$$|AC|=|DB| \text{ en } |CB|=|AD| \text{ en } |AC|>|BC|$$

Bij de realisering leggen we allereerst de punten A, B, C, D in één vlak V van de ruimte volgens de volgende figuur, waarbij het essentieel is dat AC en BD elkaar snijden.



Het middelloodvlak W van AB is dan tevens middelloodvlak van DC . Laten we nu de gelijkbenige driehoek ADE om AD wentelen tot E in W valt, dan is in die positie $|EA|=|ED|=|EC|=|EB|$. Vervolgens kiezen we voor F het spiegelbeeld van E t.o.v. het vlak V . Deze constructie ‘realiseert’ het netwerk als veelvlak met zelfdoorsnijding. Omdat deze constructie mogelijk is voor variabele afstand tussen A en B , is het ‘veelvlak’ beweeglijk!

Om een inzicht te krijgen in de ruimtelijke situatie kan men van het zichzelf doorsnijdend veelvlak een geraamte maken, uitsluitend bestaande uit de ribben. Men krijgt zo een stelsel van stangen die aan hun uiteinden draaibaar aan elkaar bevestigd zijn. Hiermee kan dan de beweeglijkheid gedemonstreerd worden, mits de stangen elkaar niet snijden.

Helaas is het bij het bovenstaande veelvlak zo dat de stangen AC en BD elkaar wel snijden, maar in de praktijk kan men dit verdoezelen door bijvoorbeeld AC een weinig gekromd te maken.

Op de volgende bladzijde is een tekening opgenomen van een stangenstelsel voor dit veelvlak.

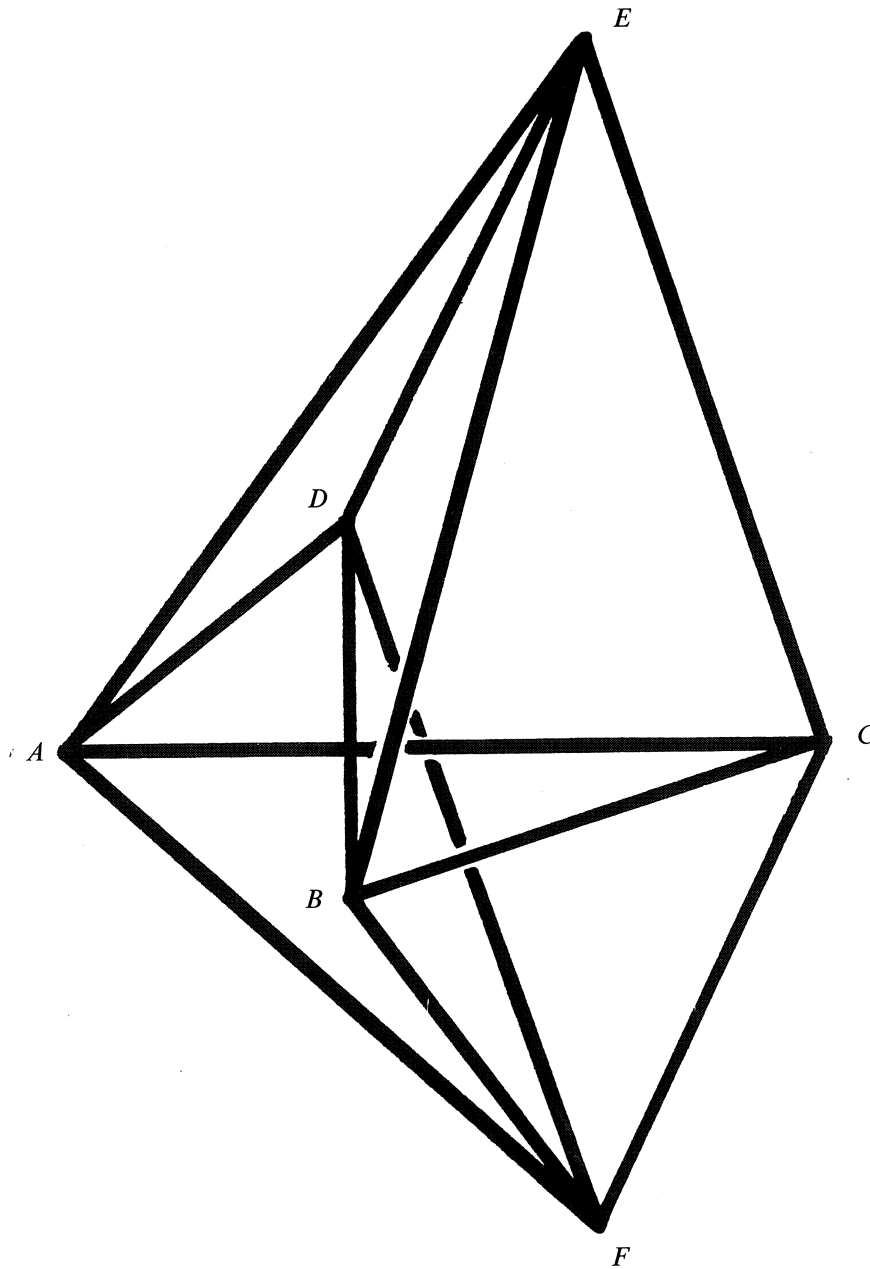
Voor het geval dat

$$\begin{aligned} |AC|=|BD|= 20 & & |AD|=|BC|= 10 \\ |EA|=|EB|=|EC|=|ED|= & & |FA|=|FB|=|FC|=|FD|= 15 \end{aligned}$$

kan men als één van de mogelijke posities in \mathbb{R}^3 bijvoorbeeld nemen

$$\begin{aligned} A &= (0, 0, 0) & D &= (0, 10, 0) \\ B &= (12, -6, 0) & E &= (10, 5, 10) \\ C &= (20, 0, 0) & F &= (10, 5, -10) \end{aligned}$$

Stangenstelsels vormen een interessant studie-object. Behalve in wiskunde en kunst spelen starre (onbeweeglijke) stangenstelsels ook een rol in de architectuur van bijvoorbeeld koepels en bruggen (als stalen geraamten). De geïnteresseerde lezer verwijzen we naar [Kenner, Geodesic Math and how to use it] en [Pugh, Introduction to tensegrity].



4. DE FORMULE VAN EULER

In 1750 schrijft Leonhard Euler in een brief aan Goldbach een aantal opmerkingen over convexe veelvlakken (zie de tekst bij stelling 3.9). Onder andere vestigt hij de aandacht op het *experimentele* feit dat steeds

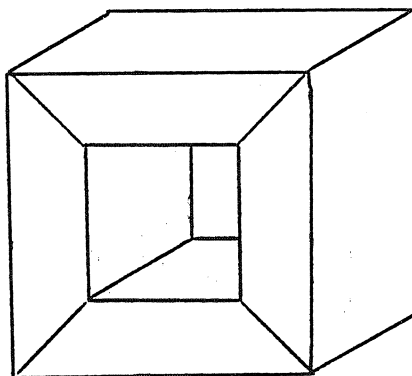
$$h - r + v = 2,$$

waarin h het aantal hoekpunten, r het aantal ribben en v het aantal veelhoeken van het veelvlak zijn. Hij uit zijn verwondering erover dat zo'n simpele betrekking niet reeds veel eerder gevonden is.

Een verklaring voor het niet eerder bekend zijn van deze formule, die sindsdien de *formule van Euler* heet, is misschien het feit dat men vóór Euler's tijd weinig combinatorisch dacht. De aandacht was veel sterker op de meetkunde gericht.

In 1812 maakt Lhuilier een systematische studie over uitzonderingen op Euler's regel. Zo blijkt bijvoorbeeld voor een kubus waaruit door en door een balkvormige tunnel uitgesneden is, te gelden

$$h - r + v = 0$$



(Bij 2.2 vindt men een netwerk van deze figuur, het oppervlak is homeomorf met dat van een torus).

Pas sinds Möbius en Listing (1858) ging men het bestaan van éézijdige oppervlakken (zoals de Möbius-band) onderkennen.

4.1

Uit de algebraïsche topologie weten we tegenwoordig dat voor celcomplexen geldt (zie b.v. [Spanier])

$$\sum_i (-1)^i a_i = \chi,$$

waarin a_i het aantal i -dimensionale cellen van het complex is. Het rechterlid χ , de uitkomst van de telling in het linkerlid, heet de *Euler-karakteristiek* van het celcomplex en is alleen afhankelijk van het homotopie-type van het celcomplex.

4.2

Op de in 4.1 gebruikte terminologie gaan we hier niet in, maar vermelden slechts dat een veelvlak gezien kan worden als een celcomplex waarin de hoekpunten 0-dimensionale cellen, de ribben 1-dimensionale cellen en de veelhoeken 2-dimensionale cellen zijn. Bovendien zijn homeomorfe veelvlakken a fortiori van hetzelfde homotopie-type.

Uit de formule in 4.1 volgt dan voor *veelvlakken*:

$$h - r + v = \chi$$

Omdat alle *convexe* veelvlakken onderling homeomorf zijn (bijvoorbeeld via radiële projectie vanuit een inwendig punt), moet χ voor alle *convexe veelvlakken hetzelfde getal zijn*. Daar een tetraëder ($h=4, r=6, v=4$) een convex veelvlak is, met $\chi=2$, volgt dan uit 4.1:

$$\text{Voor alle convexe veelvlakken is } \chi = 2.$$

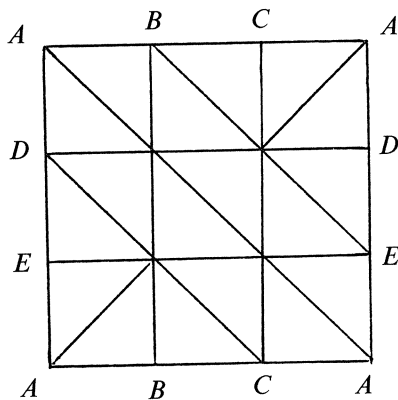
4.3

De Euler-karakteristiek is een voorbeeld van een *invariant*: Homeomorfe veelvlakken hebben dezelfde χ . Twee veelvlakken met verschillende χ kunnen niet met elkaar homeomorf zijn. Men kan echter niet concluderen dat twee veelvlakken met dezelfde χ ook homeomorf zijn. We komen hierop terug in de appendix. Nu geven we slechts enkele voorbeelden. Daartoe kiezen we drie netwerken in de zin van definitie 3.1. Geen van drieën zijn ze realiseerbaar in \mathbb{R}^3 , maar omdat hun veelhoeken uitsluitend driehoeken zijn, zijn ze volgens stelling 3.7 wel pseudorealiseerbaar in \mathbb{R}^5 .

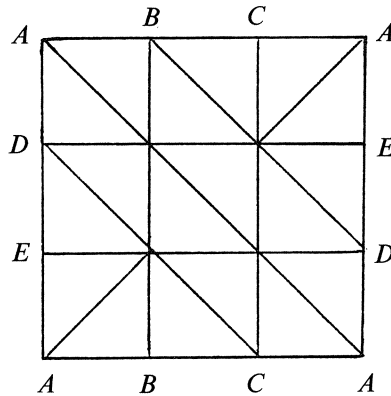
1. Voor de pseudorealiserings van dit netwerk geldt

$$\chi = 9 - 27 + 18 = 0$$

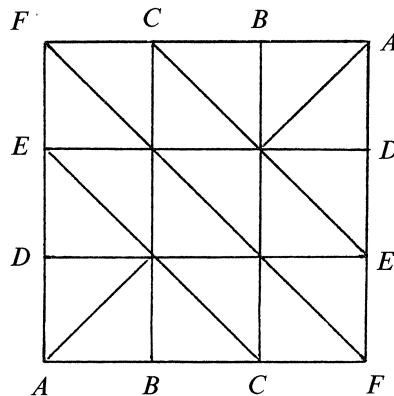
Wanneer men eerst linker- en rechterzijde aan elkaar hecht, ontstaat een 'koker', waarvan men de uiteinden nog naar elkaar toe moet 'buigen'. Het veelvlak is dus homeomorf met een *torus-oppervlak*.



2. Hiervoor geldt eveneens $\chi=0$, omdat alle aantallen hetzelfde zijn als in voorbeeld 1. Omdat men bij het aan elkaar hechten van linker- en rechterzijde ziet dat het oppervlak éénzijdig is, zoals bij een Möbius-band, kan er geen homeomorfisme bestaan met het torus-oppervlak. Het oppervlak staat bekend als de 'Kleinse fles'.



3. Hier hebben we één hoekpunt meer als in de vorige gevallen, dus $\chi=1$. Dank zij dit gegeven kan men nu snel concluderen dat er geen homeomorfisme kan zijn met een van beide vorige oppervlakken. Ook dit oppervlak is éénzijdig en staat model voor het *projectieve vlak*: Diameteraal gelegen punten op de rand van de schijf zijn geïdentificeerd.



Voor meer informatie over bovengenoemde en andere oppervlakken verwijzen we naar [Griffiths].

4.4

In 4.1 noemden we een resultaat uit de algebraïsche topologie, dat veel algemener is maar waaruit de formule van Euler voor convexe veelvlakken onmiddellijk volgt. Er zijn echter veel meer of minder elementaire bewijzen van

Euler's formule $h - r + v = 2$ voor convexe veelvlakken. Ook zijn er veel onvolledige en foutieve 'bewijzen' geleverd. In verband hiermee is het zeer aanbevelenswaardig het boekje van Lakatos te lezen. Als illustratie van een foutief bewijs (er wordt geen convexiteit verondersteld) laten we nu een vertaling volgen van het 'bewijs' dat we vonden in een Duits boek [Chr. Renner, Stereometrie, München 1948] voor de middelbare school.

Vrij vertaald uit: Chr. Renner, Stereometrie, München 1948.

STELLING. Het aantal hoekpunten (h) en vlakken (v) van een veelvlak is 2 groter dan het aantal ribben (r).

BEWIJS. We nemen van een veelvlak het ene zijvlak na het andere weg tot er uiteindelijk nog maar één zijvlak overblijft en we kijken hoe de uitdrukking $h + v - r$ verandert.

Door het wegnemen van het eerste vlak ontstaat een open veelvlak met een vrije rand, dat nog evenveel hoekpunten en ribben heeft als het gesloten veelvlak, maar één vlak minder. Door het wegnemen van het eerste vlak vermindert het getal $h + v - r$ dus met 1.

Dit getal verandert niet meer wanneer we achtereenvolgens de vlakken wegnemen die grenzen aan de vrije rand, want bij het wegnemen van een vlak dat n op elkaar volgende ribben van de vrije rand bevat, verliezen we n ribben, $n - 1$ hoekpunten en 1 vlak. Dit gaat zo door tot we tenslotte nog één vlak over hebben. Maar één vlak heeft evenveel hoekpunten als ribben, dus daarvoor is $h + v - r = v + (h - r) = v = 1$.

Oorspronkelijk hadden we dus: $h + v - r = 2$.

We laten aan de lezer over na te gaan waar in dit 'bewijs' de fout zit. Men controleer een en ander bijvoorbeeld aan het eerste netwerk in 2.2.

4.5

We sluiten deze paragraaf af met een correct en elegant bewijs dat afkomstig is van Legendre (1809). Dit bewijs maakt gebruik van de stelling uit de boldriehoeksmmeetkunde, die men zeer elementair bewijst met behulp van doorsneden en verenigingen van boldelen (zie b.v. [Molenbroek]):

Een boldriehoek met hoeken α, β, γ , beschreven op de eenheidsbol, heeft oppervlakte $\alpha + \beta + \gamma - \pi$.

Eerst stelt men vast dat het geen beperking is de Euler-formule te bewijzen voor veelvlakken waarvan alle veelhoeken driehoeken zijn: Immers door het aanbrengen van een diagonaal in een veelhoek nemen zowel het aantal ribben als het aantal veelhoeken elk met 1 toe, terwijl het aantal hoekpunten niet verandert.

Omdat het veelvlak convex wordt verondersteld, kunnen we het vanuit een inwendig punt radieel projecteren op de eenheidsbol om dat punt. Hierbij

gaan de driehoeken van het veelvlak over in boldriehoeken en er geldt:

$$4\pi = \sum_i (\alpha_i + \beta_i + \gamma_i - \pi)$$

waarbij gesommeerd wordt over de nummers i van de driehoeken en $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ de hoeken zijn van de bij de i -de driehoek behorende boldriehoek. Nu is

$$\sum_i \pi = v \cdot \pi \quad \text{en} \quad \sum_i (\alpha_i + \beta_i + \gamma_i) = h \cdot 2\pi$$

omdat de som van alle hoeken in elk hoekpunt *op de bol* 2π is. Na deling door π wordt het resultaat

$$2h - v = 4.$$

Bedenken we nu dat $3v = 2r$ (elke driehoek heeft 3 ribben, maar elke ribbe wordt dubbel geteld), dan is dit resultaat gelijkwaardig met de Euler-formule

$$h - r + v = 2.$$

OPMERKING. In feite is in bovenstaand bewijs de convexiteit niet ten volle gebruikt. Voldoende is de existentie van een punt van waaruit het veelvlak één-éénduidig door radiële projectie wordt afgebeeld op het oppervlak van een bol met dat punt als middelpunt.

5. ENIGE TOEPASSINGEN VAN EULER'S FORMULE

De zo onschuldig lijkende formule van Euler

$$h - r + v = \chi$$

heeft verregaande consequenties voor de existentie van veelvlakken met speciale eigenschappen. In deze paragraaf zullen we enkele gevolgen bespreken.

5.1

Na enig beraad is het duidelijk dat een veelvlak tenminste 4 hoekpunten moet hebben en dat het enige veelvlak met 4 hoekpunten een tetraëder is. Hieruit volgt dat een torusvormig veelvlak noodzakelijkerwijs meer dan 4 hoekpunten moet hebben. Het eerste netwerk in 2.2 is dat van een torusvormig veelvlak met 16 hoekpunten en in 4.3.1 zien we een netwerk waarvan de pseudo-realisering 9 hoekpunten heeft en ook torusvormig is. De vraag naar het kleinste aantal hoekpunten ligt voor de hand. We zullen een formule afleiden die een *ondergrens* geeft voor het aantal hoekpunten van een veelvlak met Eulerkarakteristiek χ . Hiertoe is enige slimheid nodig.

Eerst stellen we, net als in 4.5, vast dat we er zonder beperking van de algemeenheid vanuit mogen gaan dat alle veelhoeken in feite driehoeken zijn, zodat $3v = 2r$. Vervolgens maken we de triviale opmerking dat het aantal ribben nooit groter kan zijn dan $\frac{h(h-1)}{2}$, het aantal dat we zouden hebben als elk tweetal hoekpunten middels een ribbe met elkaar verbonden zijn. Dus mogen we stellen

$$3v = 2r \text{ en } r \leq \frac{h(h-1)}{2}.$$

Substitutie in de Euler-formule levert op

$$\chi = h - r + v = h - \frac{1}{3}r \geq \frac{h(7-h)}{6}.$$

Aangezien de uitdrukking in het rechterlid monotoon dalend is voor $h \geq 4$ (het maximum zit bij $h = 7/2$), kunnen we met behulp van de wortelformule voor vierkantsvergelijkingen besluiten tot

$$h \geq \frac{7 + \sqrt{49 - 24\chi}}{2}. \tag{5.2}$$

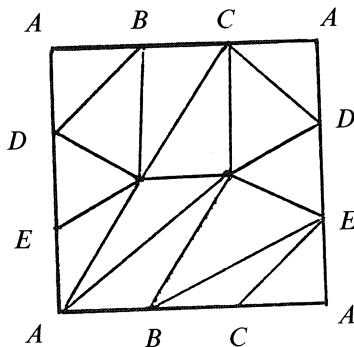
OPMERKING. Feitelijk zouden we voor de geldigheid van 5.2 moeten eisen dat $\chi \leq 2$. In de appendix zullen we zien dat er geen veelvlakken zijn met $\chi > 2$.

5.3

We geven enkele toepassingen van formule 5.2.

Voor een veelvlak dat homeomorf is met een boloppervlak geldt $\chi = 2$ en 5.2 laat hiervoor zien dat $h \geq 4$ moet zijn. Inderdaad voldoet een tetraëder.

Voor een veelvlak dat homeomorf is met het oppervlak van een torus is $\chi = 0$ en 5.2 impliceert dat $h \geq 7$. Een probleem apart is nu de existentie van een dergelijk veelvlak met inderdaad 7 hoekpunten. Enig proberen leidt tot het volgende netwerk (in de zin van 3.1), waarmee met behulp van stelling 3.7 de existentie van zo'n veelvlak in \mathbb{R}^5 gegarandeerd is. Verrassend is dat het zelfs in \mathbb{R}^3 kan! Zie [Stewart].



5.4

In de in 5.3 gegeven voorbeelden blijkt $\lceil \frac{7 + \sqrt{49 - 24\chi}}{2} \rceil$ niet slechts een ondergrens maar tevens het minimum aantal hoekpunten te zijn, de ondergrens wordt aangenomen. (Notatie: $\lceil x \rceil$ is het kleinste gehele getal $\geq x$.) Of dit in het algemeen voor ingewikkelder oppervlakken ook het geval is, is mij niet bekend. Voor het oppervlak van een krakeling



is $\chi = -2$ en dan levert 5.2: $h \geq 9$. Voor het oppervlak van een drievoudige krakeling



geeft 5.2 met $\chi = -4$ als benedengrens $h \geq 10$. Het lijkt onwaarschijnlijk dat dit haalbaar is. We gaan hier niet verder op in, maar stappen over naar een beroemd en berucht probleem dat de mathematische wereld meer dan een eeuw heeft geïrriteerd en waarin het rechterlid van 5.2 ook een belangrijke rol speelt.

5.5

In de terminologie van veelvlakken gesteld, luidde de vraag van De Morgan in 1852 aan Hamilton:

Is het juist dat 4 kleuren voldoende zijn om de veelhoeken van elk convex veelvlak te kleuren op zo'n manier dat aangrenzende (een ribbe gemeen hebbende) veelhoeken verschillend gekleurd zijn?

Naar later bleek, was Francis Guthrie de aanstichter van deze probleemstelling, die sindsdien bekend gestaan heeft als *het vierkleurenprobleem*. In 1879 meende Kempe een bevestigend bewijs gevonden te hebben, maar in 1890 toonde Heawood aan dat Kempe's bewijs een fout bevatte. Pas in 1976 lukte het Kenneth Appel en Wolfgang Haken om het bewijs 'rond' te krijgen met ingewikkelde technieken en zeer intensief gebruik van de computer!

5.6

Reeds in zijn artikel van 1890 generaliseerde Heawood het kleurenprobleem tot de vraagstelling: *Hoeveel kleuren zijn benodigd om een veelvlak met Euler-karakteristiek χ te kleuren?* Tegelijk gaf hij de volgende *bovengrens* aan:

STELLING 5.7. Om een veelvlak met Euler-karakteristiek $\chi < 2$ te kleuren zijn hoogstens $\frac{7 + \sqrt{49 - 24\chi}}{2}$ kleuren nodig.

Twee dingen zijn hierin opmerkenswaard:

1. De bovengrens voor het aantal kleuren in 5.7 is gelijk aan de ondergrens voor het aantal hoekpunten in 5.2. De redenering bij het aantal kleuren is echter geheel anders. We gaan hier niet op in. Details kan men bijvoorbeeld vinden in [Ringel] en in [Biggs, Lloyd, Wilson].
2. Het vierkleurenprobleem stelt eigenlijk de vraag of deze bovengrens ook voor $\chi = 2$ geldig is!

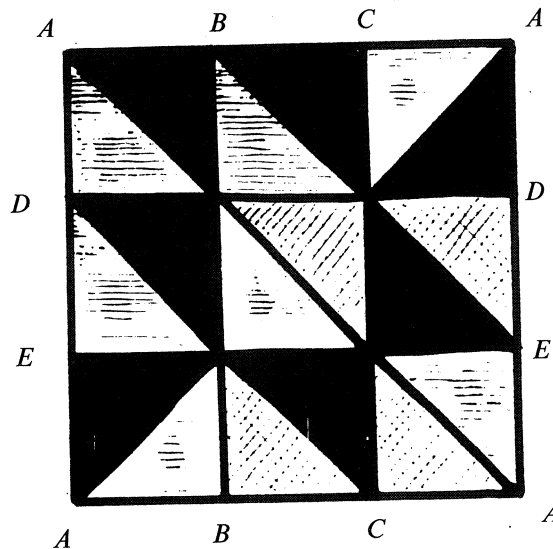
5.8

Men kan het kleurenprobleem generaliseren door toe te staan dat groepen via ribben aan elkaar vastzittende veelhoeken verenigd worden tot 'landen', waarna de vraag is of elke 'landkaart' op een veelvlak van karakteristiek χ gekleurd kan worden met ten hoogste $\frac{7 + \sqrt{49 - 24\chi}}{2}$ kleuren zodat aangrenzende (een ribbe gemeen hebbende) landen verschillend gekleurd zijn. Het antwoord is niet alleen bevestigend, maar bovendien is in de loop van de tijd bewezen dat dit aantal kleuren ook werkelijk nodig kan zijn.

Iets preciezer gezegd: Om van een gegeven veelvlak alle mogelijke landkaarten te kleuren, zijn misschien minder kleuren nodig, maar er bestaat altijd een veelvlak van dezelfde karakteristiek en een landkaart daarop die niet met minder kleuren gekleurd kan worden. Op één uitzondering na kan men zelfs altijd een dergelijk veelvlak vinden dat homeomorf is met het gegeven veelvlak. Voor de nieuwsgierige lezer vermelden we nog dat deze uitzonderingspositie wordt ingenomen door de Kleinse fles (4.3.2). Voor ieder veelvlak dat homeomorf is met de Kleinse fles, en iedere landkaart daarop, zijn 6 kleuren voldoende. Daar $\chi=0$, levert de bovengrens van 5.7 hiervoor echter 7. Wel is er een torusvormig (ook $\chi=0$) veelvlak met daarop een landkaart waarvoor 7 kleuren nodig zijn! We geven nu een aantal voorbeelden.

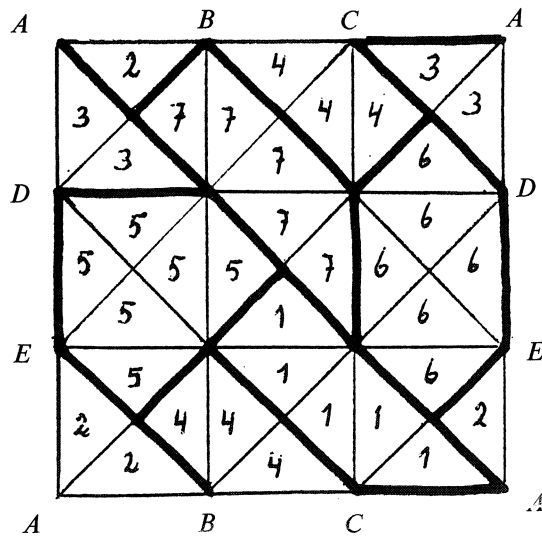
5.9

1. We gaan uit van het netwerk in 4.3.1, waarvan de pseudorealiserings een torus is. Voor het kleuren van de veelhoeken (driehoeken) zijn slechts drie kleuren nodig, zoals uit de figuur blijkt.

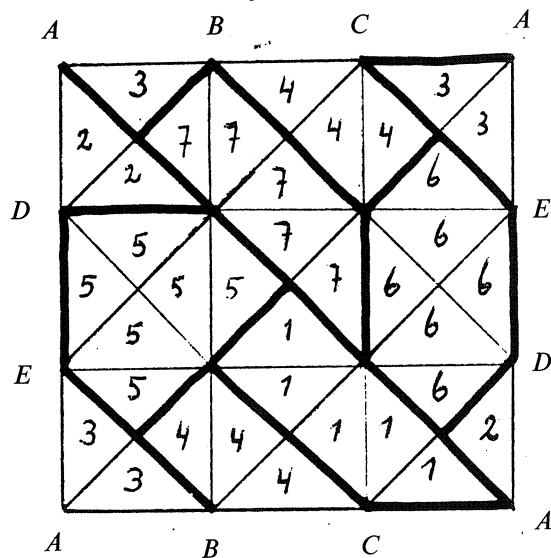


2. Hier hebben we in wezen hetzelfde veelvlak als in 1, maar in elke driehoek nu twee driehoekjes. Groepen van driehoekjes zijn samengevoegd tot

landen (de grenzen zijn dik getekend), driehoekjes met hetzelfde nummer behoren tot hetzelfde land. Omdat we nu 7 landen hebben waarvan (zoals men gemakkelijk nagaat) elk tweetal aan elkaar grenst, zijn er voor het kleuren van deze landen 7 kleuren nodig, het maximale aantal op een torus.



3. De figuur lijkt sterk op de figuur in 2. Aan de rechterzijde zijn echter de letters D en E verwisseld. Daardoor ontstaat een verfijning van 4.3.2, de Kleinse fles. Uiteraard wordt nu ook de landenindeling anders! We zien dat land 2 niet grenst aan 4, zodat deze landen dezelfde kleur mogen hebben en 6 kleuren voldoende zijn!



4. Als interessant experiment kan de lezer zelf van een strook papier een Möbius-band vouwen. Weliswaar is dit geen gesloten veelvlak, maar er kan een landkaart op getekend worden waarvoor 6 kleuren nodig zijn!

5.10

Weer een ander onderwerp waarin de formule van Euler een grote rol speelt, is de vraag naar veelvlakken die een zekere regelmatige structuur hebben. Zo kan men zich afvragen wat er te zeggen valt over veelvlakken *waarbij in elk hoekpunt evenveel ribben samenkomen*. Laten we zo'n veelvlak 'hoekpunt-regelmatig' noemen. Stel dat we een veelvlak hebben van karakteristiek χ en dat in ieder hoekpunt a ribben samenkomen. Stellen we verder dat het veelvlak bestaat uit p_3 driehoeken, p_4 vierhoeken, p_5 vijfhoeken etc., dan levert een eenvoudige telprocedure de volgende identiteiten op:

$$ah = 2r, \sum ip_i = 2r, \sum p_i = v$$

(de factor 2 ontstaat omdat elke ribbe dubbel geteld wordt). Elimineren we met bovenstaande identiteiten de grootheden h, r en v uit de Euler-formule, dan ontstaat de relatie

$$\sum_i ([2a - (a - 2)i] p_i) = 2a\chi \tag{5.11}$$

waarbij de sommatie in het linkerlid loopt vanaf $i = 3$ en uiteraard een eindige som is (vanaf zekere i zijn immers alle p_i gelijk aan 0).

5.12

Voor het geval $\chi = 2$ geven we nu een lijst van nadere uitwerkingen van formule 5.11 voor verschillende waarden van a (uiteraard $a \geq 3$):

$$\begin{aligned} a = 3: & 3p_3 + 2p_4 + p_5 = 12 + p_7 + 2p_8 + \dots \\ a = 4: & 2p_3 = 16 + 2p_5 + 4p_6 + 6p_7 + \dots \\ a = 5: & p_3 = 20 + 2p_4 + 5p_5 + 8p_6 + \dots \\ a = 6: & 0 = 24 + 4p_4 + \dots \end{aligned}$$

In deze lijst is 5.11 zo uitgewerkt dat links en rechts van het gelijkteken slechts termen staan die ≥ 0 zijn.

5.13

Uit 5.12 volgt dat voor een hoekpunt-regelmatig veelvlak met $\chi = 2$ geldt:

- 1) $a \leq 5$
- 2) als onder de veelhoeken geen driehoeken voorkomen ($p_3 = 0$), dan moet $a = 3$ zijn.
- 3) het is onmogelijk dat onder de veelhoeken geen driehoeken, noch vierhoeken, noch vijfhoeken voorkomen ($p_3 = p_4 = p_5 = 0$).
- 4) als naast hoekpunt-regelmatigheid bovendien geëist wordt dat alle veelhoeken van dezelfde soort zijn (uitsluitend n -hoeken, dus $p_i = 0$ als $i \neq n$), dan zijn er slechts de volgende mogelijkheden:

a	n	p_n	
3	3	4	tetraëder
3	4	6	kubus
3	5	12	dodecaëder
4	3	8	octaëder
5	3	20	icosaëder

Achter elke mogelijkheid in 4) is de naam vermeld van het *regelmatig convexe veelvlak* dat er aan voldoet. Bedenk echter dat regelmatigheid noch convexiteit voorondersteld zijn. Er zijn dan ook nog andere veelvlakken die aan de aantallen in 4) voldoen. Wel volgt uit deze *louter combinatorische beschouwing* dat er slechts *vijf* regelmatig convexe veelvlakken zijn. Ze komen reeds voor in Boek XIII van de Elementen van Euclides onder de naam *Platonische lichamen*. Waarschijnlijk moeten we ze echter toeschrijven aan Theaetetus (octaëder, icosaëder) en aan de Pythagoreërs (kubus, tetraëder, dodecaëder). Enige jaartallen in dit verband: Pythagoras 500 v. Chr., Plato en Theaetetus 400 v. Chr., Euclides 300 v. Chr.

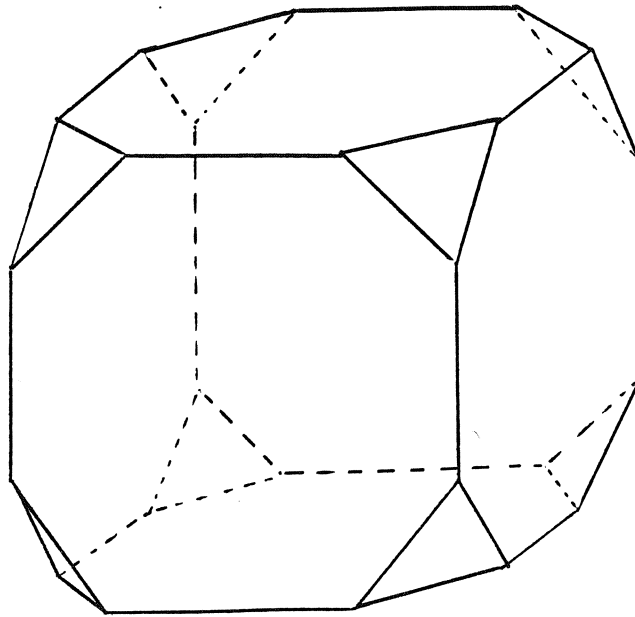
5.14

In 5.13 hebben we de formules van 5.12 gebruikt om aan te tonen dat er slechts vijf regelmatige convexe veelvlakken kunnen zijn. De formules zijn ook bruikbaar bij het onderzoek naar de mogelijkheden voor *semi-regelmatige veelvlakken*, waarbij men veelvlakken poogt op te sporen die slechts twee of drie soorten veelhoeken hebben, waarvan er in elk hoekpunt evenveel (a) samenkomen. Ook hiervan waren aan de Grieken reeds een aantal bekend. Pappus (300 n. Chr.) vermeldt in dit verband de onderzoeken van Archimedes (250 v. Chr.). We geven enkele voorbeelden (*steeds* $\chi=2$):

$$\begin{aligned}
 a=3 \quad p_3=4 \quad p_6=4 \\
 a=3 \quad p_3=8 \quad p_4=6 \\
 a=3 \quad p_4=12 \quad p_6=8 \quad p_8=6 \\
 a=3 \quad p_5=12 \quad p_6=20 \\
 a=3 \quad p_4=30 \quad p_6=20 \quad p_{10}=12 \\
 a=5 \quad p_3=80 \quad p_5=12
 \end{aligned}$$

Tegenwoordig zijn een aantal existentiële stellingen bekend voor veelvlakken met van iedere soort veelhoeken een voorgeschreven aantal zodat aan de formules voldaan is (zie [Grünbaum]).

Een aantal mogelijkheden zien we meetkundig 'ontstaan' door het *afvijlen van hoekpunten* van andere veelvlakken. Zo krijgen we op deze manier uit de kubus een voorbeeld van $a=3, p_3=8, p_8=6$ en uit het afvijlen van een regelmatig 20-vlak ontstaat $a=3, p_5=12, p_6=20$.



Vijlen we bij de kubus door tot op het midden van de ribben, dan ontstaat een veelvlak met $a=4$, $p_3=8$, $p_4=6$.

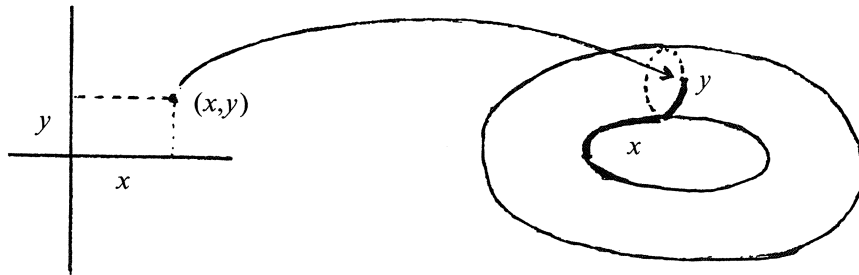
5.15

In 5.10 tot en met 5.14 kan men de rollen van hoekpunten en veelhoeken verwisselen. We laten de precieze redenering in 5.10 voor dit geval aan de lezer over. De verkregen formules blijven onveranderd, maar doen dan uitspraken over veelvlakken waarbij *alle veelhoeken a -hoeken* zijn en p_i *het aantal hoekpunten is waarin i ribben samenkomen*. Deze dualiteit in veelvlakken ziet men meetkundig ontstaan door bij een veelvlak het ingeschreven veelvlak te bekijken, dat de 'middens' van de veelhoeken als hoekpunten heeft. Op deze manier zijn bijvoorbeeld icoesaëder en dodecaëder met elkaar verbonden en evenzo kubus en octaëder; het tetraëder is zelfdual. Een fraaie illustratie van de hier beschreven eigenschappen vindt men terug in de architectuur van koepelconstructies, zoals bijvoorbeeld bij de door Buckminster Fuller ontworpen 'bol van Montréal'. Voor meer details hierover verwijzen we naar [Mulder], [Kenner] en [Pugh] (tensegrity).

5.16

Tot slot van deze paragraaf benadrukken we nogmaals dat we in 5.10 t/m 5.15 alleen veelvlakken met $\chi=2$ bekeken hebben. We nodigen de lezer uit om zelf andere gevallen te bestuderen. Daarbij bevelen we met name aan om dit te doen voor $\chi=0$ en speciaal te onderzoeken welke torusvormige veelvlakken mogelijk zijn!

Zoals men de rechte lijn kan opwinden om een cirkel, zo kan men ook het platte vlak middels een dubbelperiodieke afbeelding afbeelden op een torussoppervlak.



Hierdoor ontstaat een verband tussen torusvormige veelvlakken en periodieke geometrische vlakvullingen, het nader onderzoeken meer dan waard. Voor regelmatige, halfregelmatige, periodieke, a-periodieke vlakvullingen en soortgelijke problemen in de ruimte, verwijzen we graag naar de bijdragen van Grünbaum, Shephard, Coxeter, Bouwkamp e.a. in [Klarner].

APPENDIX

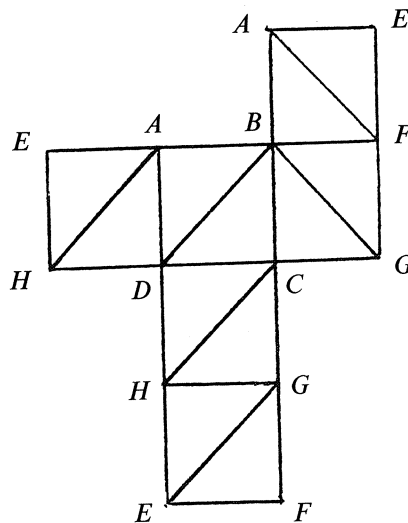
6. OVER DE TOPOLOGISCHE AARD VAN VEELVLAKKEN

In § 3 hebben we helaas moeten constateren dat in het algemeen bij een netwerk geen veelvlak hoort. Er is echter een lichtpuntje: volgens stelling 3.7 is ieder driehoeksnetwerk pseudorealiseerbaar. Omdat de enige concessie die we hiervoor moeten doen daaruit bestaat dat de driehoeken een andere vorm kunnen hebben, is het gemakkelijk in te zien dat alle quasi-realiseringsen van een netwerk onderling homeomorf zijn. In deze paragraaf zullen we zien dat de homeomorfiëklassen van veelvlakken op een fraaie manier te classificeren zijn en dat op een 'algebraïsche' manier de klasse van een veelvlak bepaald kan worden uit het netwerk.

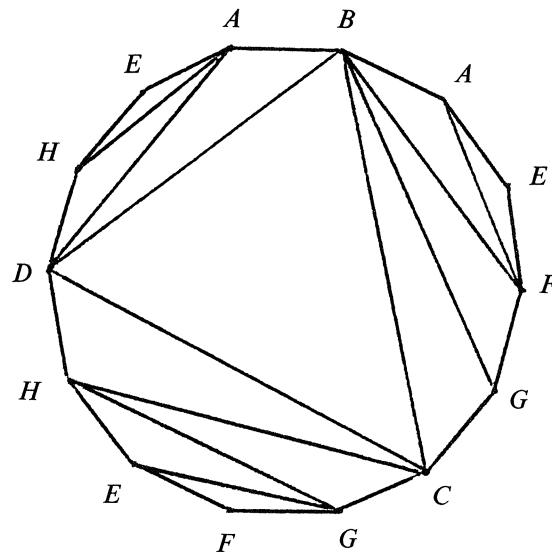
6.1

Om te beginnen poneren we zonder bewijs dat in ieder driehoeksnetwerk de driehoeken zodanig vervormd kunnen worden dat het netwerk de gedaante krijgt van één veelhoek, opgebouwd uit driehoeken.

VOORBEELD: een netwerk van een kubus, verfijnd tot driehoeksnetwerk, is bijvoorbeeld:



en dit kan vervormd worden tot



6.2

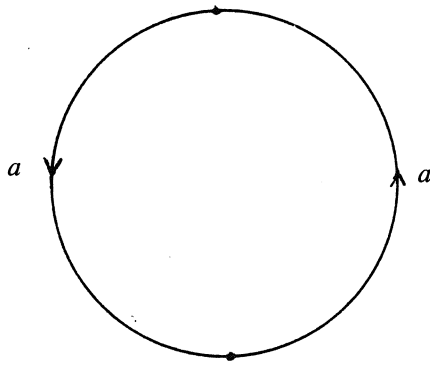
In plaats van de gewenste identificaties op de rand van de in 6.1 beschreven veelhoek aan te geven middels de benaming van de *hoekpunten*, kan dit ook doeltreffend gebeuren door aan iedere *ribbe* van de veelhoek een *letter* en een *richtingspijl* toe te kennen: Twee ribben met dezelfde letter worden met elkaar geïdentificeerd volgens hun pijlrichtingen. Het grote voordeel van de laatste methode is dat op deze manier van elk punt op de rand van de veelhoek gegeven is met welk(e) ander(e) punt(en) het geïdentificeerd wordt, onafhankelijk van de benaming der hoekpunten. Hiermee zien we

STELLING 6.3. Elk veelvlak is als topologische ruimte homeomorf met de quotiënt ruimte van een schijf in de \mathbb{R}^2 , die ontstaat door de rand van de schijf op te delen in een eindig, *even* aantal bogen welke *paarsgewijs* volgens aangegeven letters en pijlrichtingen met elkaar geïdentificeerd worden.

6.4. Voorbeelden van quotiënt ruimten als bedoeld in stelling 6.3

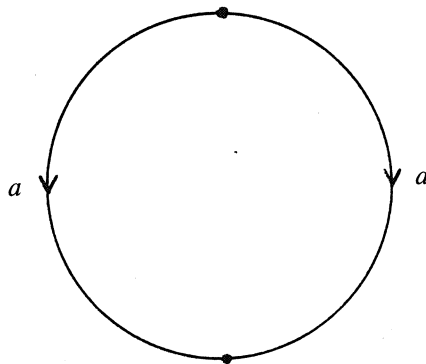
6.4.1

Hier is de rand van de schijf verdeeld in twee bogen met dezelfde letter. De pijlrichtingen zijn zo dat diametrale punten geïdentificeerd worden. Het resultaat is een model van het *reële projectieve vlak* $\mathbb{R}P^2$.



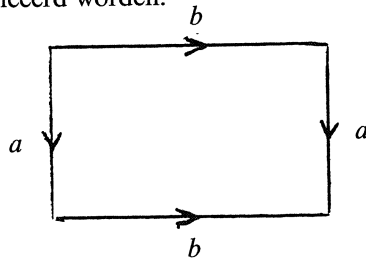
6.4.2

Ook hier is de rand verdeeld in slechts twee bogen. Identificatie van randpunten volgens de pijlen levert nu echter een homeomorf beeld van het boloppervlak S^2 .



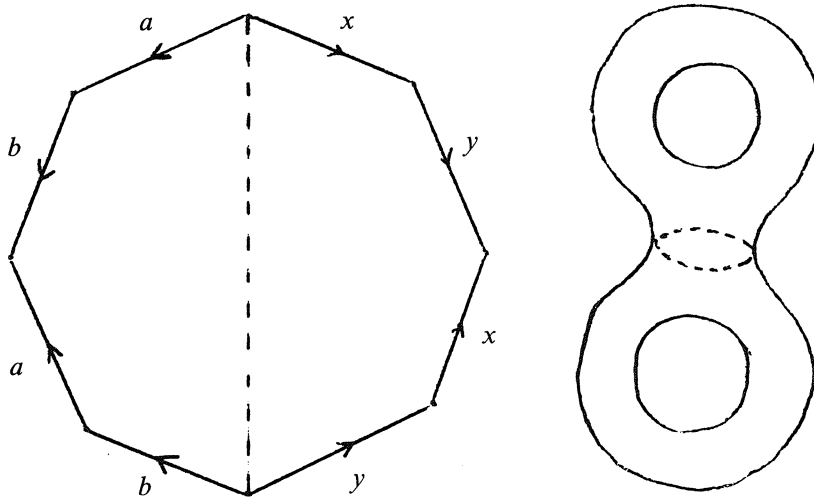
6.4.3

De rand is verdeeld in vier bogen. Identificatie levert een torusoppervlak T^2 op: Door de a 's te identificeren ontstaat een cilinder, hiervan moeten onder- en bovencirkel nog geïdentificeerd worden.



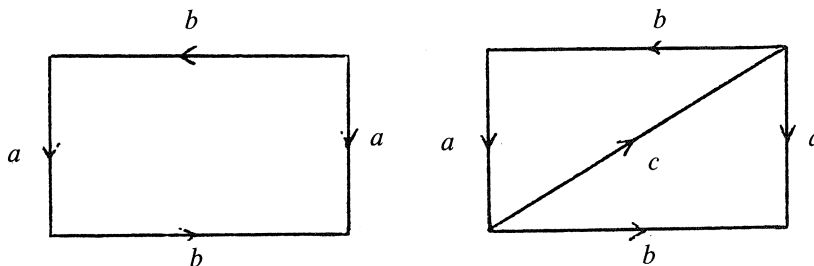
6.4.4

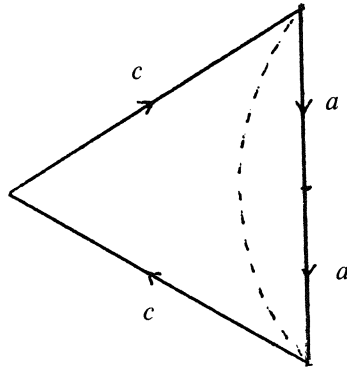
In dit geval is het resulterende oppervlak dat van een *krakeling*. Men ziet dit in door de figuur eerst door te knippen langs de stippellijn; vervolgens brengt men in beide delen afzonderlijk de gewenste identificaties aan. Er ontstaan dan twee torusoppervlakken, elk voorzien van een gat met de stippellijn als rand. Deze twee randen dienen nu nog met elkaar geïdentificeerd te worden.



6.4.5

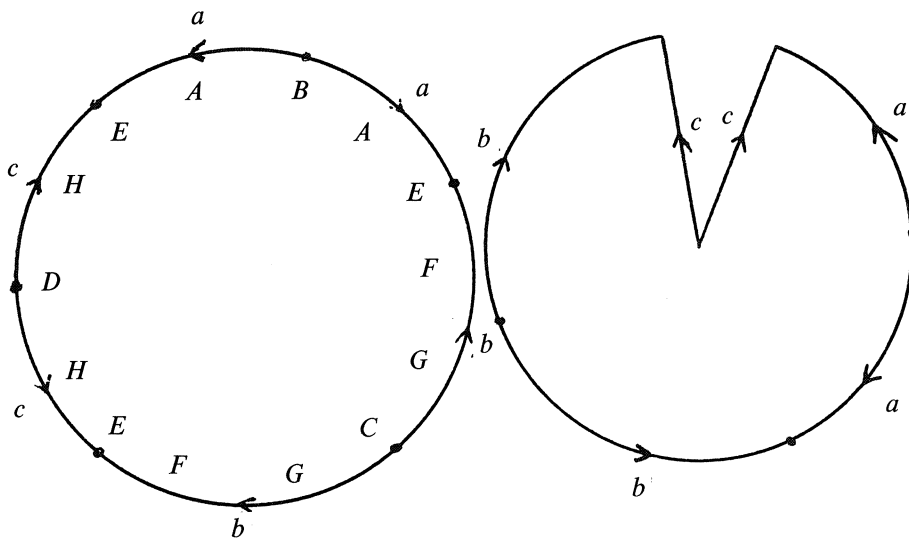
Het oppervlak dat bij deze figuur hoort, staat bekend als 'De Kleinse fles'. Identificeert men eerst de a 's, dan ontstaat een cilinder. De onder- en bovencirkel hiervan moeten echter 'verkeerd om' met elkaar geïdentificeerd worden! De Kleinse fles kan men ook anders zien. Daartoe knippen we de figuur open langs de aangegeven diagonaal en lijmen beide stukken aan elkaar langs de b 's! Knippen we deze figuur open langs de aangegeven stippellijn en identificeren we in beide delen afzonderlijk, dan ontstaan twee projectieve vlakken, elk voorzien van een gat met de stippellijn als rand. Door deze randen met elkaar te identificeren moet dan weer de Kleinse fles ontstaan!





6.4.6

De identificatie bij het voorbeeld van de kubus in 6.1 geschiedt volgens onderstaand pijlschema. Voor de duidelijkheid hebben we de ligging van de hoekpunten in de veelhoek van 6.1 hier aan de binnenkant weergegeven. Het kubusoppervlak is homeomorf met een boloppervlak. Om dat aan deze figuur te zien, kunnen we de schijf eerst zo vervormen dat de c -bogen samenvallen. In de nieuwe schijf, die alleen berand wordt door a - en b -bogen kunnen we vervolgens ten aanzien van de b -bogen dezelfde truc toepassen. Het resultaat is een schijf zoals in 6.4.2: Een boloppervlak!



6.5

De presentatie van een oppervlak als de quotiëntruimte van een schijf, zoals bedoeld in stelling 6.3 en geïllustreerd in 6.4, leent zich voor abstractie:

Rondgaand langs de rand van de schijf, bijvoorbeeld tegen de klokrichting in,

schrijven we de letters op die we tegenkomen. Bovendien voorzien we een letter van de exponent -1 als de bijbehorende pijl tegengesteld is aan de richting van de rondgang.

Bij de voorbeelden in 6.4 levert dit procédé de volgende 'randformules' op:

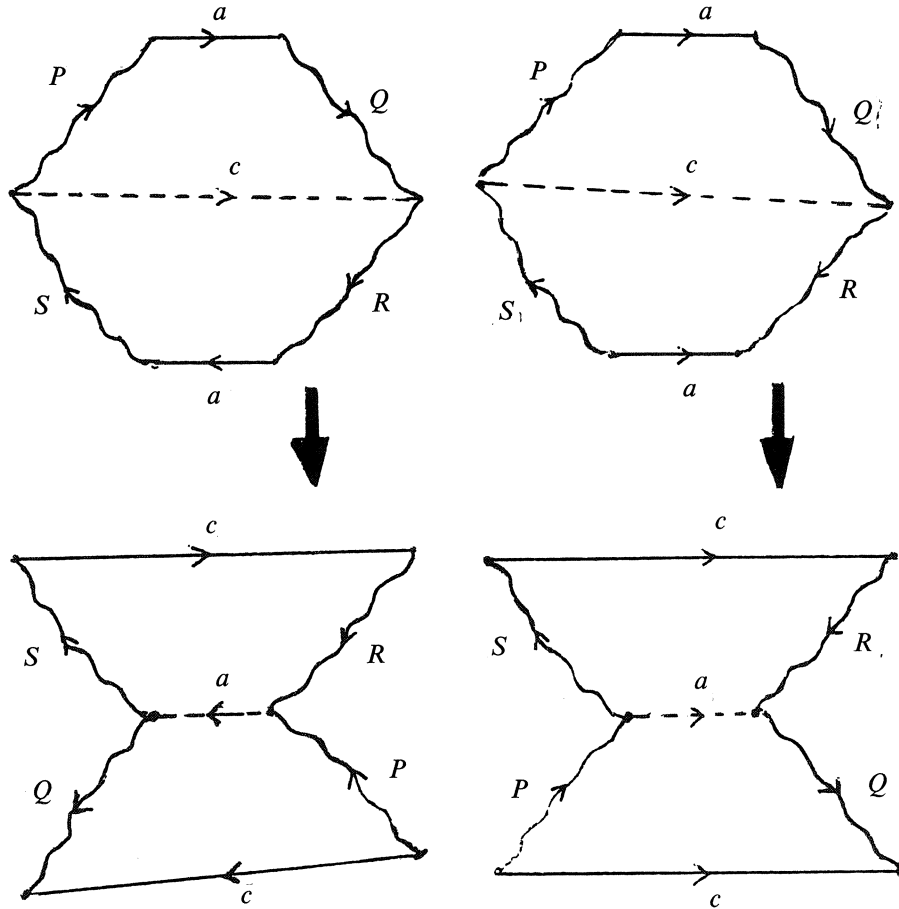
- 6.4.1: aa
- 6.4.2: aa^{-1} of $a^{-1}a$
- 6.4.3: $aba^{-1}b^{-1}$ of $ba^{-1}b^{-1}a$ of ...
- 6.4.4: $aba^{-1}b^{-1}yxy^{-1}x$ of ...
- 6.4.5: $aba^{-1}b$ en dit wordt vervormd tot $c^{-1}c^{-1}a^{-1}a^{-1}$
- 6.4.6: $ac^{-1}cb^{-1}ba^{-1}$ en dit wordt vervormd tot $ab^{-1}ba^{-1}$ en daarna tot aa^{-1} .

6.6

Op cyclische verwisseling na (een beginstuk van de formule mag verhuizen naar achteren) is de randformule van een presentatie eenduidig bepaald. Omgekeerd bepaalt iedere formule, mits iedere gebruikte letter tweemaal voorkomt, eenduidig een presentatie.

6.7

In 6.4.5 en 6.4.6 hebben we reeds kennis gemaakt met knip- en plakprocédés welke men met een netwerk kan uitvoeren. Hierdoor verandert wel de randformule, maar het oppervlak (de quotiëntruimte) verandert niet, tenminste op homeomorfie na. We willen dit veralgemenen door bepaalde delen van de randformule weer te geven met één hoofdletter, zoals in onderstaande diagrammen. Deze diagrammen verschillen alleen daarin, dat de pijlen van a dezelfde en tegengestelde richting hebben. Beide diagrammen knippen we open langs de aangegeven stippellijn (c) en plakken de delen volgens de a 's weer aan elkaar.



We zien op deze manier dat de formules

$$PaQRaS \text{ en } PaQRa^{-1}S$$

veranderen in respectievelijk

$$P^{-1}cQ^{-1}ScR \text{ en } ScRQc^{-1}P.$$

Hierbij mogen de delen P , Q , R en S ook leeg zijn. Let er op dat de exponent -1 de gebruikelijke algebraïsche betekenis heeft: Als $P = xyz^{-1}$, bijvoorbeeld, dan is $P^{-1} = zy^{-1}x$. Uiteraard mag de letter c niet in P , Q , R of S voorkomen.

6.8

De toegestane operaties met randformules kunnen we nu samenvatten:

- I Cyclische verwisseling (6.6).
- II Van een letter de *beide* exponenten door hun tegengestelde vervangen. (Hierdoor verandert de identificatie niet, aangezien beide pijlen tegelijk omdraaien).

- III In een formule een combinatie aa^{-1} (naast elkaar) weglaten, *mits er dan nog wat overblijft* (zie 6.4.6).
 IV De formule $PaQRaS$ vervangen door $P^{-1}cQ^{-1}ScR$.
 V De formule $PaQRa^{-1}S$ vervangen door $ScRQc^{-1}P$.

6.9

Met behulp van de in 6.8 opgesomde operaties kan men nu iedere randformule transformeren in één van de volgende gedaanten:

$$B: aa^{-1}$$

$$T_n: a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \cdots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}$$

$$P_m: a_1 a_1 a_2 a_2 \cdots a_m a_m$$

We zullen dat hier niet bewijzen. Men kan dit bijvoorbeeld nalezen in [Ringel]. In plaats daarvan zullen we voorbeelden uitwerken.

$$\begin{aligned} \alpha. \quad & abcda^{-1}b \cdot dc^{-1} \xrightarrow{I} \underset{P}{dc^{-1}} \underset{R}{abcda^{-1}b} \xrightarrow{IV} \\ & \xrightarrow{IV} a^{-1}cd^{-1}ee \cdot cda^{-1} \xrightarrow{I} \underset{Q}{cda^{-1}a^{-1}c} \underset{S}{d^{-1}e} \underset{IV}{e} \xrightarrow{IV} \\ & \xrightarrow{IV} faa \underset{IV}{d^{-1}} \underset{IV}{d^{-1}e} \underset{I}{e} \cdot f \xrightarrow{I} \underset{II}{ffa} \underset{II}{ad^{-1}} \underset{II}{d^{-1}e} \underset{II}{ee} \xrightarrow{II} \\ & \xrightarrow{II} ffaaddee. \text{ Dit is } P_4. \\ \beta. \quad & \underset{P}{abc} \underset{Q}{d} \underset{R}{b^{-1}a^{-1}c^{-1}} \underset{V}{d^{-1}} \xrightarrow{V} \underset{P}{ec^{-1}b^{-1}a^{-1}e^{-1}} \underset{Q}{abc} \xrightarrow{II,V} \\ & \xrightarrow{II,V} \underset{II,V}{fe^{-1}abb^{-1}a^{-1} \cdot f^{-1}e} \xrightarrow{I} \underset{II,V}{f^{-1}efe^{-1}abb^{-1}a^{-1}} \\ & \xrightarrow{III,III} f^{-1}efe^{-1}. \text{ Dit is } T_1. \\ \gamma. \quad & aabcb^{-1} \cdot c^{-1} \xrightarrow{I} \underset{P}{c^{-1}aabcb^{-1}} \underset{S}{} \xrightarrow{IV} \underset{Q}{cdb} \underset{S}{cb^{-1}d} \\ & \xrightarrow{IV} \underset{IV}{eb^{-1}d^{-1}b^{-1} \cdot de} \xrightarrow{I} \underset{P}{dee} \underset{R}{b^{-1}d^{-1}b^{-1}} \xrightarrow{IV} \\ & \xrightarrow{IV} \underset{IV}{e^{-1}e^{-1}d^{-1}} \underset{R}{ff} \underset{IV}{d^{-1}} \xrightarrow{IV} eeggff. \text{ Dit is } P_3. \end{aligned}$$

6.10

Het belang van de in 6.9 aangegeven zogenaamde *normalisatieformules* blijkt door vergelijking met wat we in 6.4.4 en 6.4.5 gedaan hebben. Hadden we in 6.4.4 twee aan elkaar bevestigde torussen en in 6.4.5 twee aan elkaar bevestigde projectieve vlakken, de normalisatie T_n is de randformule voor n aan elkaar bevestigde torussen en P_m de randformule voor m aan elkaar

bevestigde projectieve vlakken! Net als in 6.4.2 is B de randformule voor een boloppervlak. Op deze manier zien we dus dat de veelvlakken, althans naar de topologische aard van de erdoor bepaalde oppervlakken, uiteenvallen in drie families.

6.11

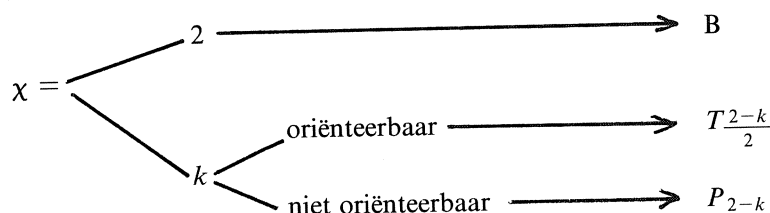
Daarbij onderscheidt P_m zich van B en T_n door het *niet oriënteerbaar* zijn van P_m ; Net als bij een Möbius-band bestaat er op P_m een gesloten kromme waarop bij rondgang links en rechts verwisseld worden, ook boven en onder worden dan verwisseld: Het oppervlak P_m is éénzijdig. Zoiets kan men aan elke randformule onmiddellijk zien, want dit fenomeen vindt precies dan plaats als een letter *tweemaal met dezelfde exponent* voorkomt. In de voorbeelden 6.9 α en γ hadden we dan ook zonder enig rekenwerk vooraf kunnen vaststellen dat de normalisatie van de vorm P_m zou zijn.

6.12

Rekent men voor de normalisaties de Euler-karakteristiek uit (hetgeen we aan de lezer overlaten), dan blijkt

$$\begin{aligned} \chi(B) &= 2 \\ \chi(T_n) &= 2 - 2n \\ \chi(P_m) &= 2 - m \end{aligned}$$

Hiermee is de opmerking in 5.2 bewezen, dat altijd $\chi \leq 2$ is. Tevens blijkt hieruit dat de Euler-karakteristiek in combinatie met het wel of niet oriënteerbaar zijn (6.11) volledige informatie geeft over de topologische aard. In een schema:



(voor oriënteerbaarheid is χ noodzakelijkerwijs even!)

Bovendien zien we dat verschillende normalisatieformules ook werkelijk horen bij topologisch verschillende (niet homeomorfe) veelvlakken.

LITERATUUR

A.D. ALEXANDROW, *Konvexe Polyeder*, Berlin, 1958.
 N.L. BIGGS, E.K. LLOYD, R.J. WILSON, *Graph Theory 1736-1936*, Oxford etc. 1977.
 H.S.M. COXETER, *Regular Polytopes*, New York 1963.
 H.B. GRIFFITHS, *Surfaces*, Cambridge etc. 1976.
 B. GRÜNBAUM, *Convex Polytopes*, London etc. 1967.

- P.J. HILTON, S. WYLIE, Homology Theory, Cambridge 1967.
 H. KENNER, Geodesic math and how to use it, Berkeley etc. 1976.
 D.A. KLARNER, The mathematical Gardner, Belmont 1981.
 I. LAKATOS, Proofs and refutations, Cambridge 1976.
 P. MOLENBROEK, Leerboek der Stereometrie, Groningen 1923.
 A. PUGH, An introduction to tensegrity, Berkeley etc. 1976.
 A. PUGH, Polyhedra, a visual approach, Berkeley etc. 1976.
 G. RINGEL, Map Color Theorem, Berlin etc. 1974.
 E.H. SPANIER, Algebraic Topology, New York 1966.
 E. STEINITZ, H. RADEMACHER, Vorlesungen über die Theorie der Polyeder, Berlin 1934.
 B.M. STEWART, Adventures among the Toroids, Okemos 1970.
 L. FEYES TOTH, Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum, Berlin etc. 1953.
 L. FEYES TOTH, Regular Figures, Oxford etc. 1964.
 M.J. WENNINGER, Spherical Models, Cambridge etc. 1979.
 B.L. VAN DER WAERDEN, Ontwakende Wetenschap, Groningen 1950.

ARTIKELN

- K. APPEL, W. HAKEN, The solution of the Four-Color-Map Problem. *Scientific American*, oct. 1977, 108-121.
 F. VAN DER BLIJ, Met meer driehoeken bouwen. *Pythagoras*, 20 nr. 1 (1980), 9-12.
 R. CONNELLY, A Counterexample to the Rigidity Conjecture for Polyhedra. *I.H.E.S. Publ. Math.* 47 (1977), 333-340.
 N.H. KUIPER, Sphères Polyédriques Flexibles dans E^3 , d'après Robert Connelly. *Seminaire Bourbaki 30e ann. 1977/78 no. 514*.
 H.M. MULDER, De bol van Montréal. *Pythagoras* 12 nr. 4 (1972/1973), 83-90.

Vlakke Kristallografische Groepen

H. de Vries

Uit 'Excursies in de Wiskunde II', Nijmegen

1. DE EUCLIDISCHE GROEP $E(n)$

Zij $n \in \mathbb{N}$. Onder de n -dimensionale euclidische ruimte verstaan we gemakshalve \mathbb{R}_n , bestaande uit de kolomvectoren met n reële componenten, voorzien van de bekende metriek: $d(v, w) = |v - w|$, voor $v, w \in \mathbb{R}_n$. Hierbij is de optelling in \mathbb{R}_n componentsgewijs gedefinieerd, evenals de scalaire vermenigvuldiging met reële getallen en als ${}^t v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, ${}^t w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$, voor elementen v, w van \mathbb{R}_n , dan $(v|w) = \sum_k v_k w_k$, $|v| = \sqrt{(v|v)}$. De congruentiegroep $E(n)$ van \mathbb{R}_n is de groep der congruenties, ofwel isometrismen, van \mathbb{R}_n naar zichzelf, d.w.z. der bijecties van \mathbb{R}_n naar \mathbb{R}_n die d invariant laten.

Als $v \in \mathbb{R}_n$, dan is de *verschuiving* T_v over v , gedefinieerd door $T_v w = v + w$ voor $w \in \mathbb{R}_n$, een congruentie van \mathbb{R}_n ; de afbeelding $v \mapsto T_v$ is een isomorfisme van de additieve groep van \mathbb{R}_n naar de groep $T(n)$ der verschuivingen van \mathbb{R}_n .

Als $A \in O(n)$, d.w.z. als A een orthogonale reële n -bij- n -matrix is, dan is $\mathbb{R}_n \ni v \mapsto Av \in \mathbb{R}_n$ een congruentie van \mathbb{R}_n .

Zo hebben we 2 ondergroepen van $E(n)$: de groep $T(n)$ der verschuivingen van \mathbb{R}_n en de groep $O(n)$ der orthogonale transformaties van \mathbb{R}_n .

STELLING.

- (i) Als $A \in E(n)$, $A(0) = 0$, dan $A \in O(n)$.
- (ii) Als $C \in E(n)$, dan is er precies één v in \mathbb{R}_n en één A in $O(n)$ met $C_v = T_v A$.
- (iii) Als $u, v \in \mathbb{R}_n$, $A \in O(n)$, dan $T_v A \cdot T_u \cdot (T_v A)^{-1} = T_{Au}$.

BEWIJS.

- (i) Merk op: als $v_1, v_2 \in \mathbb{R}_n$, dan is $1/2(v_1 + v_2)$ het *midden* van $\{v_1, v_2\}$, d.w.z. de enige vector w met $d(v_1, w) = d(w, v_2) = 1/2d(v_1, v_2)$ en $v_1 + v_2$ de enige vector w zó, dat $\{v_1, v_2\}$ en $\{0, w\}$ gemeenschappelijk midden hebben. Hieruit volgt dat de optelling in \mathbb{R}_n bepaald wordt door de oorsprong 0 en de metriek d . Uit $(v_1|v_2) = 1/2((d(0, v_1 + v_2))^2 - (d(0, v_1))^2 - (d(0, v_2))^2)$ voor $v_1, v_2 \in \mathbb{R}_n$ volgt dat door 0 en d ook het inproduct vastligt. Tenslotte is voor $v \in \mathbb{R}_n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ de vector αv de enige vector w met $(w|v') = \alpha(v|v')$ voor alle v' uit \mathbb{R} , waaruit volgt dat ook de scalaire vermenigvuldiging in \mathbb{R}_n door 0 en d bepaald wordt. Hieruit volgt: als $a \in E(n)$, $A(0) = 0$, dan is A een lineaire afbeelding die het inproduct invariant laat, d.w.z. $A \in O(n)$.

- (ii) Als $C \in E(n)$, dan $T_{-C(0)}C \in O(n)$ blijkt (i), dus neem $v = C(0)$, $A = T_{-C(0)}C$. Als omgekeerd $v \in \mathbb{R}_n$, $A \in O(n)$ en $C = T_v A$, dan volgt hieruit door toepassing op 0:

$$C(0) = v \text{ en dan ook } A = T_{-C(0)}C.$$

- (iii) Stel $u, v \in \mathbb{R}_n$, $A \in O(n)$. Voor w in \mathbb{R}_n geldt dan:
- $$\begin{aligned} (T_v A \cdot T_u \cdot (T_v A^{-1}))(w) &= (T_v A \cdot T_u \cdot A^{-1} T_{-v})(w) = T_v A T_u A^{-1}(w - v) \\ &= T_v A T_u (A^{-1}w - A^{-1}v) = T_v A (A^{-1}w - A^{-1}v + u) = T_v (w - v + Au) \\ &= w + Au; \text{ dus } T_v A \cdot T_u \cdot (T_v A)^{-1} = T_{Au}. \end{aligned}$$

GEVOLG. $T(n)$ is een normaaldeler van $E(n)$, $O(n) \cong E(n)/T(n)$ (omdat $O(n) \ni A \mapsto T(n)A \in E(n)/T(n)$ een isomorfisme is).

VOORBEELD 1. Stel $n = 1$; we maken geen onderscheid tussen \mathbb{R}_1 en \mathbb{R} . De groep $O(1)$ bestaat uit slechts 2 elementen: het eenheidselement (1) (ook genoteerd als e) en (-1) (de spiegeling in 0). Voor $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ geldt: $T_\alpha \cdot (-1)(\beta) = \alpha - \beta = (T_{1/2\alpha} \cdot (-1) \cdot T_{-1/2\alpha})(\beta)$; dus: $T_\alpha \cdot (-1) = T_{1/2\alpha} \cdot (-1) \cdot T_{-1/2\alpha}$, en $T_\alpha \cdot (-1)$ is de *spiegeling* $s_{1/2\alpha}$ in $1/2\alpha$ ($1/2\alpha$ is het enige onder $s_{1/2\alpha}$ invariante punt). Dus $E(1)$ is de disjuncte vereniging van $T(1)$ en de verzameling der spiegelingen in de punten van \mathbb{R} .

VOORBEELD 2. Stel $n = 2$. Voor $A \in O(2)$ zijn er de volgende 2 mogelijkheden:

1. $\det A = 1$. Dan $A = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$ met $\phi \in \mathbb{R}$ (waarbij ϕ slechts modulo $2\pi\mathbb{Z}$ bepaald is); we schrijven ook $R_\phi^{(0)}$ voor deze matrix (deze is de draaiing over ϕ in positieve zin om 0). Voor $v \in \mathbb{R}_2$ is dan $T_v \cdot R_\phi^{(0)} \cdot T_{-v}$ de draaiing over ϕ om v , te noteren als $R_\phi^{(v)}$; uit $(T_v \cdot R_\phi^{(0)} \cdot T_{-v})(u) = (1_2 - R_\phi^{(0)})v + R_\phi^{(0)}u$, voor $u \in \mathbb{R}_2$ volgt: $T_v \cdot R_\phi^{(0)} \cdot T_{-v} = T_w \cdot R_\phi^{(0)}$ met $w = (1_2 - R_\phi^{(0)})v$; $\phi \notin 2\pi\mathbb{Z}$ is de matrix

$$\begin{pmatrix} 1 - \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & 1 - \cos \phi \end{pmatrix}$$

omkeerbaar en is $T(2) \cdot R_\phi^{(0)}$ de verzameling van alle draaiingen over ϕ (voor $\phi \in 2\pi\mathbb{Z}$ is dit juist $T(2)$). Met $SO(2) := \{A \in O(2) \mid \det A = 1\}$ zien we dus: $T(2) \cdot SO(2)$ bestaat uit alle verschuivingen en alle draaiingen.

2. $\det A = -1$. Dan heeft A de eigenwaarden 1 en -1 ; stel $\begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix}$ eigenvector voor A bij de eigenwaarde 1. Dan is A de spiegeling in de lijn $\mathbb{R} \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix}$ en $A = \begin{pmatrix} \cos 2\phi & \sin 2\phi \\ \sin 2\phi & -\cos 2\phi \end{pmatrix}$. Voor $v_1 + v_2$ met $v_1 = \alpha_1 \begin{pmatrix} \cos 2\phi \\ \sin 2\phi \end{pmatrix}$, $v_2 = \alpha_2 \begin{pmatrix} \sin 2\phi \\ -\cos 2\phi \end{pmatrix}$, met $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, geldt dan: $T_v A = T_{v_1} \cdot T_{1/2v_2} A \cdot A^{-1} T_{1/2v_2} A = T_{v_1} \cdot T_{1/2v_2} A T_{-1/2v_2}$; als $v_1 = 0$ is dit de *spiegeling* s_l in de lijn $l := 1/2v_2 + \mathbb{R} \begin{pmatrix} \sin 2\phi \\ -\cos 2\phi \end{pmatrix}$ en als $v_1 \neq 0$ is dit de *glijspiegeling* $T_{v_1} s_l$ in de lijn l over de vector v_1 .

OPMERKING. Algemeen weten we uit de lineaire algebra: elk element van $SO(n)$ is een produkt van een aantal, zeg k , echte draaiingen A_1, A_2, \dots, A_k (d.w.z. niet-identieke draaiingen) om 0 in onderling loodrechte vlakken V_1, V_2, \dots, V_k door de oorsprong, een k -voudige draaiing, en elk element van $O(n) \setminus SO(n)$ een produkt $S_H \cdot A_1 A_2 \dots A_k$ van zo'n k -voudige draaiing met de spiegeling S_H in een hypervlak H door 0 dat de draaiingsvlakken V_1, V_2, \dots, V_k omvat, een k -voudige draaispiegeling. Hierbij laat A_p elke vector loodrecht op V_p invariant.

Stel dan u een willekeurig element van \mathbb{R}_n en schrijf $u = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_k$ met $u_p \in V_p$, $(u_0 | u_p) = 0$, voor alle p ; zij dan v_p de vector in V_p met $(1_n - A_p)v_p = u_p$, voor alle p . Als $A \in SO(n)$, met $A = A_1 A_2 \dots A_k$ als hiervoor, dan $T_u A = T_{u_0} \cdot T_{v_1} A_1 T_{-v_1} \cdot T_{v_2} \dots T_{v_k} A_k T_{-v_k}$; als $u_0 = 0$ is dit een k -voudige draaiing in de vlakken V_1, V_2, \dots, V_k om de punten v_1, v_2, \dots, v_k , en als $u_0 \neq 0$ is het, samengesteld met de verschuiving over u_0 , een k -voudige schroefing.

Als $A \in O(n) \setminus SO(n)$, met $A = S_H \cdot A_1 A_2 \dots A_k$ als hiervoor, dan $T_u A = T_{u_0} \cdot S_H \cdot T_{v_1} A_1 T_{-v_1} \cdot T_{v_2} A_2 T_{-v_2} \dots T_{v_k} A_k T_{-v_k}$; schrijf $u_0 = u'_0 + u''_0$ met $u'_0 \in H$, $u''_0 \perp H$; dan

$$\begin{aligned} T_u A &= T_{u'_0} \cdot T_{1/2u''_0} S_H T_{-1/2u''_0} \cdot T_{v_1} A_1 T_{-v_1} \cdot T_{v_2} A_2 T_{-v_2} \dots T_{v_k} A_k T_{-v_k} \\ &= T_{u'_0} \cdot T_{1/2u''_0} (S_H \cdot T_{v_1} A_1 T_{-v_1} \cdot T_{v_2} A_2 T_{-v_2} \dots T_{v_k} A_k T_{-v_k}) T_{-1/2u''_0}; \end{aligned}$$

voor $u'_0 = 0$ is dit een k -voudige draaispiegeling in de vlakken $1/2u''_0 + V_p$ om de punten $1/2u''_0 + v_p$ ($p = 1, 2, \dots, k$) in het hypervlak $1/2u''_0 + H$ en voor $u'_0 \neq 0$ is het, samengesteld met de verschuiving over u'_0 , een k -voudige glijdraaispiegeling.

Voor $k = 0$ krijgen we de identieke afbeelding als de 0-voudige draaiing, de niet-identieke verschuivingen als de 0-voudige schroefingen, de spiegelingen in hypervlakken als de 0-voudige draaispiegelingen en de glijspiegelingen in hypervlakken als de 0-voudige glijdraaispiegelingen. Voor $n = 3$ kan k dan alleen nog 1 zijn en hebben we hiernaast alleen nog de (enkelvoudige) draaiingen, de (enkelvoudige) draaispiegelingen en de (enkelvoudige) schroefingen.

2. PERIODIEKE PATRONEN

Zij F een niet-lege deelverzameling van \mathbb{R}_n . De congruentiegroep $C(F)$ van F wordt gedefinieerd d.m.v.: $C(F) = \{C \in E(n) | C(F) = F\}$, en de verschuivingsgroep $T(F)$ als $T(F) = C(F) \cap T(n)$. We noemen F een k -periodiek patroon als er een lineair onafhankelijk k -tal (b_1, b_2, \dots, b_k) vectoren in \mathbb{R}_n is met $T(F) = \{T_v | v \in \sum_{p=1}^k \mathbb{Z}b_p\}$; dan heet $\sum_p \mathbb{Z}b_p$ het verschuivingsrooster $R(F)$ van F en (b_1, b_2, \dots, b_k) een basis van $R(F)$. Als dan $D \in E(n)$, dan is met F ook $D(F)$ een k -periodiek patroon in \mathbb{R}_n , met $C(D(F)) = D \cdot C(F) \cdot D^{-1}$, $T(D(F)) = D \cdot T(F) \cdot D^{-1}$, $R(D(F)) = A(R(F))$ als $D = T_v \cdot A$ met $v \in \mathbb{R}_n$, $A \in O(n)$. Als, algemener, $v \in \mathbb{R}_n$ en $A \in GL_n(\mathbb{R})$ (= de groep der omkeerbare reële n -bij- n -matrices), d.w.z. $T_v A \in A(n) := T(n) \cdot GL_n(\mathbb{R})$ (= de affiene groep van \mathbb{R}_n), dan is met F ook $F^* := (T_v A)(F)$ een k -periodiek patroon in \mathbb{R}_n , met $T(F^*) = (T_v A)T(F)(T_v A)^{-1} = AT(F)A^{-1}$ en $R(F^*) = A(R(F))$; in het algemeen zal echter $C(F^*)$ niet gelijk zijn aan $(T_v A)C(F)(T_v A)^{-1}$. We

zullen k -periodieke patronen F en F' in \mathbb{R}_n *equivalent* noemen als er een A in $GL_n(\mathbb{R})$ en een v in \mathbb{R}_n is zó, dat $C(F') = (T_v A)C(F)(T_v A)^{-1}$ (d.w.z. $C(F)$ en $C(F')$ zijn geconjugerd door middel van een element van de affiene groep $A(n)$); hierbij kan de congruentiegroep van het k -periodieke patroon $(T_v A)(F)$ groter zijn dan die van F' , hoewel ze dezelfde verschuivingsgroep hebben.

VOORBEELD 1. F $F^* := (T_v A)F$ F'

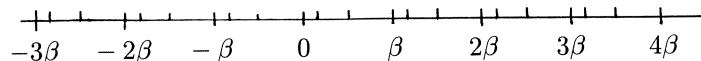
$C(F) = T(F)$ $C(F^*) = T(F^*) \cup T_v \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} T_{-v} \cdot T(F')$ $C(F') = T(F')$
 $R(F) = \mathbb{Z}b_1 + \mathbb{Z}b_2$ $R(F^*) = \mathbb{Z}Ab_1 + \mathbb{Z}Ab_2$ $R(F') = \mathbb{Z}Ab_1 + \mathbb{Z}Ab_2$

Hierbij $(b_1|b_2) \neq 0$, $(Ab_1|Ab_2) = 0$, $Ab_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

VOORBEELD 2. Zij F een enkelperiodiek patroon (met $k = 1$) in \mathbb{R} , $R(F) = \mathbb{Z}\beta$. Dan zijn er de volgende mogelijkheden:

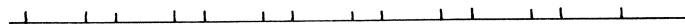
- (1) $C(F) = T(F)$, d.w.z. $C(F)$ bevat geen spiegelingen, bijvoorbeeld

$$F = \{ \frac{1}{6}\beta | 1 \in 6\mathbb{Z} \cup (1 + 6\mathbb{Z}) \cup (3 + 6\mathbb{Z}) \}:$$



- (2) $C(F) \neq T(F)$, d.w.z. $C(F)$ bevat wel een spiegeling, zeg s_α ; door overgang op $T_{-\alpha}F$ te veronderstellen: $s_0 \in C(F)$. Dan $C(F) = T(F) \cup s_0 T(F)$, bijv.

$$F = \{ \frac{1}{6}\beta | 1 \in (1 + 6\mathbb{Z}) \cup (-1 + 6\mathbb{Z}) \}:$$



Verder door vermenigvuldiging met $1/\beta$ in feite nog in beide gevallen $\beta = 1$ te onderstellen. Er zijn dus precies 2 equivalentieklassen van enkelvoudig periodieke patronen in \mathbb{R} .

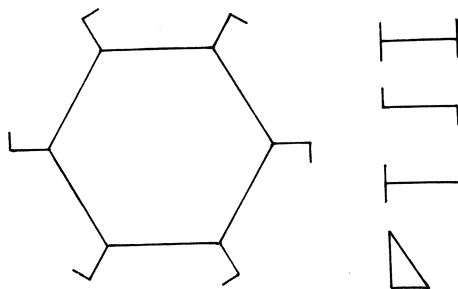
VOORBEELD 3. Zij F een deelverzameling van \mathbb{R}_2 , met $C(F)$ eindig; dan is zeker F een 0-periodiek patroon in \mathbb{R}_2 , omdat elke niet-identieke verschuiving oneindige orde heeft. We merken eerst op, dat, algemeen voor $v_1, v_2, \dots, v_s \in \mathbb{R}_n$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \in \mathbb{R}$, met $\sum_{p=1}^s \alpha_p = 1$, en $\phi \in A(n)$, geldt: $\phi(\sum_{p=1}^s \alpha_p v_p) = \sum_{p=1}^s \alpha_p \phi(v_p)$, d.w.z. affiene transformaties bewaren affiene combinaties; deze

eigenschap geldt namelijk duidelijk zowel voor verschuivingen als voor lineaire transformaties. Hieruit volgt: als $v \in \mathbb{R}_2$, dan is $\frac{1}{\#C(F)} \sum_{\phi \in C(F)} \phi(v)$ een punt van \mathbb{R}_2 (nl. het zwaartepunt van de baan van v onder $C(F)$), dat invariant is onder alle congruenties van F . Door zonodig F te verschuiven mogen we veronderstellen: $\phi(0) = 0$, voor alle ϕ in $C(F)$, d.w.z. $C(F)$ is een eindige ondergroep van $O(2)$. Als α minimaal is met $R_\alpha^{(0)} \in C(F)$, $0 < \alpha \leq 2\pi$, dan noodzakelijkerwijs $\alpha = 2\pi/m$ voor zeker natuurlijk getal m , en dan is $\{R_k^{(0)} \cdot \frac{2\pi}{m} | k \in \{0, 1, \dots, m-1\}\}$ de verzameling der draaiingen in $C(F)$, d.w.z. $C(F) \cap SO(2)$. Als $C(F)$ een spiegeling bevat, dan is, door zonodig F te draaien, te veronderstellen dat de spiegeling $S_{\mathbb{R}e_1}$ in het opspansel van de eerste kanonieke-basisvector $e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ in $C(F)$ zit, d.w.z. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ in $C(F)$ zit; dan ook $R_k^{(0)} \cdot \frac{2\pi}{m} \cdot S_{\mathbb{R}e_1}$, d.w.z.

$$\begin{pmatrix} \cos k \frac{2\pi}{m} & -\sin k \frac{2\pi}{m} \\ \sin k \frac{2\pi}{m} & \cos k \frac{2\pi}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ d.w.z. } \begin{pmatrix} \cos k \frac{2\pi}{m} & \sin k \frac{2\pi}{m} \\ \sin k \frac{2\pi}{m} & -\cos k \frac{2\pi}{m} \end{pmatrix},$$

d.w.z. de spiegeling in de lijn $\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} \cos k \frac{\pi}{m} \\ \sin k \frac{\pi}{m} \end{pmatrix}$ in $C(F)$, voor $k = 0, 1, \dots, m-1$; dit zijn dan ook alle spiegelingen in $C(F)$ omdat het produkt van 2 spiegelingen uit $C(F)$ een draaiing uit $C(F)$ is. Hieruit volgt dat er op equivalentie na slechts de volgende mogelijkheden voor $C(F)$ zijn:

$C(F) = C_m =: \{R_k^{(0)} \cdot \frac{2\pi}{m} | k \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}\}$ met $m \in \mathbb{N}$ (dit is de *cyclische cirkelgroep met orde m*);
 $C(F) = D_m =: C_m \cup C_m \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, met $m \in \mathbb{N}$ (dit is de *diëdergroep met orde 2m*).

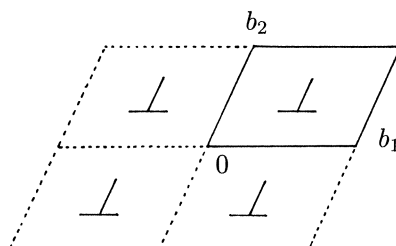


Voor $m > 2$ krijgen we D_m als de congruentiegroep van de regelmatige m -hoek met hoekpunten $\begin{pmatrix} \cos k \frac{2\pi}{m} \\ \sin k \frac{2\pi}{m} \end{pmatrix}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, en C_m als congruentiegroep door bijv. in de hoekpunten vaantjes te plaatsen (zie figuur); voor $m = 1$, zijn ook eenvoudig geschikte plaatjes te verzinnen. Hiermee zijn de 0-periodieke patronen met eindige congruentiegroep in \mathbb{R}_2 op equivalentie na geïdentificeerd; een voorbeeld van een 0-periodiek patroon in \mathbb{R}_2 met oneindige congruentiegroep is bijv. een cirkel met 0 tot middelpunt, waarvan $O(2)$ de congruentiegroep is.

3. CLASSIFICATIE DER DUBBELPERIODIEKE PATRONEN IN \mathbb{R}_2 OP EQUIVALENTIE NA

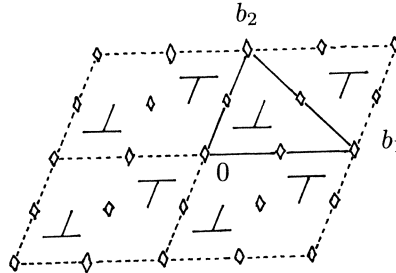
Zij F een dubbelperiodiek patroon in \mathbb{R}_2 . Met $A \in O(2)$, $v \in \mathbb{R}_2$, $T_v A$ in $C(F)$ geldt dan, voor $u \in \mathbb{R}_2$: $T_v A \cdot T_u \cdot (T_v A)^{-1} = T_{Au} \in T(F)$, dus $Au \in R(F)$; hieruit volgt dat de toevoeging $T_v A \mapsto A$ een homomorfisme is van $C(F)$ naar de groep $O(2) \cap C(R(F))$, met als kern $T(F)$. Zij $C_0(F)$ het beeld van dit homomorfisme; $C_0(F)$ heet de *puntgroep* van F t.o.v. de oorsprong 0. Let wel: $C_0(F)$ hoeft geen ondergroep van $C(F)$ te zijn. Omdat de elementen van $C_0(F)$ het rooster $R(F)$ invariant laten, is het spoor van zo'n element een geheel getal (omdat zo'n element op een basis van $R(F)$ een geheelgetalige matrix heeft). Nu is het spoor van de draaiing $R_\phi^{(0)}$, met $0 < \phi \leq 2\pi$, gelijk aan $2 \cos \phi$, en dit is dan en slechts dan een geheel getal als $\phi \in \{2\pi, \pi, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\}$. Hieruit volgt: als $C_0(F)$ uitsluitend uit draaiingen bestaat, dan $C_0(F) = C_m$, en als $C_0(F)$ ook spiegelingen in lijnen bevat, en we (door zonodig F te verdraaien) veronderstellen dat $C_0(F)$ de spiegeling $s_{\mathbb{R}e_1}$ bevat, dan $C_0(F) = D_m$, met $m \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$. In de nu volgende classificatie is (b_1, b_2) een geschikte basis van $R(F)$; in het geval dat $C_0(F)$ spiegelingen bevat zullen we voor de eenvoud van de notatie de normalisatie $C_0(F) = D_m$ voor zekere m eisen. In de bijbehorende figuren zijn steeds 4 parallelogrammen aangegeven die 0 als een hoekpunt en $\pm b_1$ en $\pm b_2$ met 0 aanliggende hoekpunten hebben (elk van deze 4 parallelogrammen is een zogenaamd fundamenteelgebied voor de verschuivingsgroep $T(F)$). Door omlijning is een *motief*, d.w.z. een fundamenteelgebied voor $C(F)$, aangeduid. Spiegellijnen zijn gestreept en glijspiegellijnen die niet tevens spiegellijnen zijn, zijn gestippeld-gestreept aangegeven. Draaiingspunten van draaiingen over $2\pi/m$, die niets tevens draaiingspunten zijn van draaiingen over een kleinere positieve hoek, zijn voor $m = 2, 3, 4, 6$ opvolgend als volgt aangegeven: \diamond , \triangle , \square , \square . De equivalentieclassen van dubbelperiodieke patronen in \mathbb{R}_2 zijn genummerd van 1 t.e.m. 17 en ook voorzien van hun gebruikelijke aanduiding.

Geval $C_0(F) = C_1$.



No. 1 (p1). $C(F) = T(F)$. Het rooster $R(F)$ is willekeurig.

Geval $C_0(F) = C_2$.



No. 2 (p2). Dan bevat $C(F)$ een element van de vorm $T_u \cdot R_\pi^{(0)}$, een draaiing over π om $1/2u$; door overgang op $T_{-1/2u}(F)$ te veronderstellen: $R_\pi^{(0)} \in C(F)$ en dan $C(F) = T(F) \cdot C_2$. Het rooster $R(F)$ is willekeurig.

Geval $C_0(F) = D_1$.

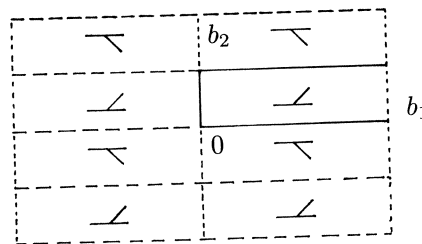
Stel b een element $\neq 0$ van $R(F)$ met kleinste lengte op $\mathbb{R}e_1$ (omdat $s_{\mathbb{R}e_1} \in C_0(F)$ en $v + s_{\mathbb{R}e_1} v \in \mathbb{R}e_1$ voor elke v in $R(F)$, bestaat b zeker). Zij verder b' een element $\neq 0$ van $R(F)$ met kleinste lengte met $b' \perp b$ (ook b' bestaat). Nu zijn er 2 gevallen:

- (i) $R(F) = \mathbb{Z}b + \mathbb{Z}b'$,
- (ii) $R(F) \neq \mathbb{Z}b + \mathbb{Z}b'$.

In geval (i) kiezen we: $b_1 = b$, $b_2 = b'$. Hier zijn weer 2 deelgevallen te onderscheiden:

- (i₁) $C(F)$ bevat een spiegeling,
- (i₂) $C(F)$ bevat geen spiegeling.

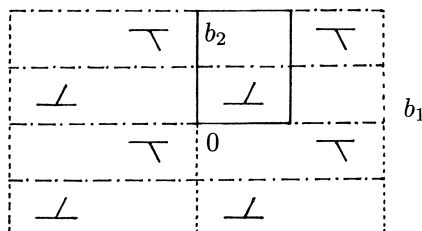
Bij (i₁) is zo'n spiegeling van de vorm $T_u s_{\mathbb{R}b_1}$ met $u \perp b_1$, d.w.z. de spiegeling in de lijn $1/2u + \mathbb{R}b_1$, en dan door overgang op $T_{-1/2u}(F)$ te veronderstellen: $s_{\mathbb{R}b_1} \in C(F)$, d.w.z. $C(F) = T(F) \cdot D_1$; dit is



No. 3 (pm). $C(F) = T(F) \cdot d_1$. Het rooster $R(F)$ is een willekeurig rechthoekig rooster.

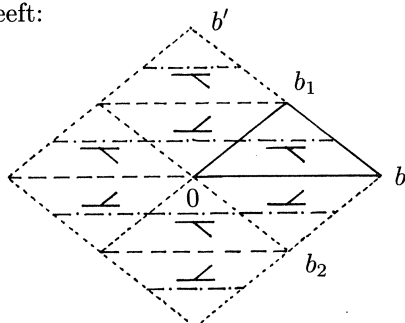
Bij (i₂) bevat $C(F)$ een glijspiegeling $T_u s_{\mathbb{R}b_1}$ met $u \notin R(F)$; met $u = u_1 + u_2$ waarbij $u_1 \in \mathbb{R}b_1$, $u_2 \in \mathbb{R}b_2$ is dit de glijspiegeling in de lijn $1/2u_1 + \mathbb{R}b_1$ over u_2 ; door overgang op $T_{-1/2u_1}(F)$ te veronderstellen: $u_1 = 0$; ook nog te veronderstellen $u_2 = \alpha b_1$ met $0 < \alpha < 1$ (door samenstelling met een verschuiving over een geheel veelvoud van b_1); daar $T_{2u_2} = (T_{u_2} s_{\mathbb{R}b_1})^2 \in T(F)$

volgt dan: $u_2 = 1/2b_1$. Dit is:



No. 4 (pq). $C(F) = T(F) \cup T(F) \cdot T_{1/2b_1} s_{\mathbb{R}b_1}$. Het rooster $R(F)$ is een willekeurig rechthoekig rooster.

In geval (ii) is er in $R(F)$ een vector van de vorm $c := \alpha b + \alpha' b'$ met $0 < \alpha < 1$, $0 < \alpha' < 1$; daar $c + s_{\mathbb{R}b_1} c = 2\alpha b \in R(F)$ en $c - s_{\mathbb{R}b_1} c = 2\alpha' b' \in R(F)$ zien we dan: $\alpha = \alpha' = 1/2$. Met $b_1 := 1/2(b + b')$, $b_2 := 1/2(b - b')$ is dan (b_1, b_2) een basis van $R(F)$. Dit geeft:



No. 5 (cm). In ieder geval bevat $C(F)$ een element van de vorm $T_{\alpha_1 b_1} T_{\alpha_2 b_2} s_{\mathbb{R}(b_1+b_2)}$ met $0 \leq \alpha_1 < 1$, $0 \leq \alpha_2 < 1$, en dan $(T_{\alpha_1 b_1} T_{\alpha_2 b_2} s_{\mathbb{R}(b_1+b_2)})^2 = T_{(\alpha_1-\alpha_2)b_1} T_{(\alpha_2-\alpha_1)b_2} \in T(F)$, dus $\alpha_1 = \alpha_2$; schrijf $\alpha = \alpha_1$; dan $T_{\alpha_1 b_1} T_{\alpha_2 b_2} s_{\mathbb{R}(b_1+b_2)} = T_{\alpha(b_1-b_2)} s_{\mathbb{R}(b_1+b_2)}$, en dit is de spiegeling in de lijn $1/2\alpha(b_1 - b_2) + \mathbb{R}(b_1 + b_2)$. Door F te vervangen door $T_{-1/2\alpha(b_1-b_2)}(F)$ mogen we veronderstellen: $s_{\mathbb{R}(b_1+b_2)} \in C(F)$. Dan $C(F) = T(F) \cdot D_1$. Het rooster $R(F)$ is een willekeurig ruitenrooster.

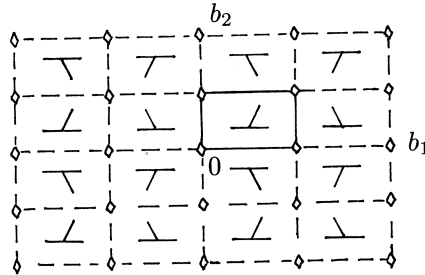
Geval $C_0(F) = D_2$.

Kies weer b, b' als in geval $C_0(F) = D_1$ en onderscheid weer de gevallen:

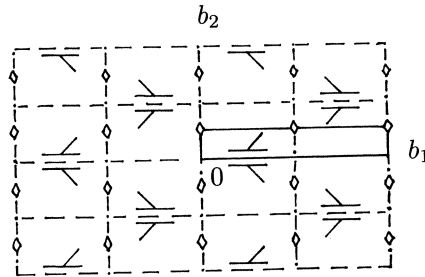
- (i) $R(F) = \mathbb{Z}b + \mathbb{Z}b'$ met de keuze $b_1 = b$, $b_2 = b'$ en
- (ii) $R(F) \neq \mathbb{Z}b + \mathbb{Z}b'$ met de keuze $b_1 = 1/2(b + b')$, $b_2 = 1/2(b - b')$.

Bij (i) krijgen we 3 deelgevallen: $C(F)$ bevat spiegelingen in onderling loodrechte lijnen (en door verschuiving van F ervoor te zorgen dat $C(F)$ de spiegelingen $s_{\mathbb{R}b_1}$ en $s_{\mathbb{R}b_2}$ bevat; dit is nummer 6), $C(F)$ bevat wel spiegelingen in lijnen maar niet in onderling loodrechte lijnen (dan ervoor te zorgen, door zonnodig op F een verschuiving en eventueel de spiegeling $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, die de rollen van b_1 en b_2 verwisselt, toe te passen dat $s_{\mathbb{R}b_1}$ in $C(F)$ zit; dit is nummer 7), $C(F)$ bevat geen spiegelingen (dan ervoor te zorgen dat $T_{1/2b_1} s_{\mathbb{R}b_1}$ en $T_{1/2b_2} s_{\mathbb{R}b_2}$ in $C(F)$ zitten; dit is nummer 8). In geval (ii) is ervoor te zorgen dat $s_{\mathbb{R}(b_1+b_2)}$ en

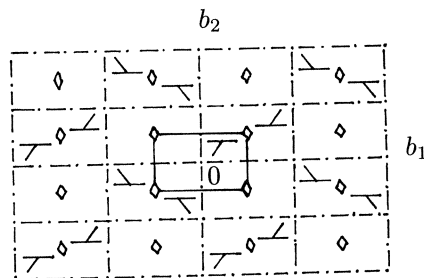
$s_{\mathbb{R}(b_1+b_2)}$ in $C(F)$ zitten; dit geeft nummer 9.



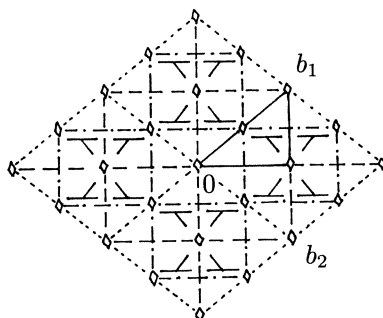
No. 6 (pmm). $C(F) = T(F) \cdot D_2$; $R(F)$ is een willekeurig rechthoekig rooster.



No. 7 (pmg). $C(F) = T(F) \cdot D_1 \cup T(F) \cdot (T_{1/2b_2} s_{\mathbb{R}b_2}) \cdot D_1$; $R(F)$ is een willekeurig rechthoekig rooster.



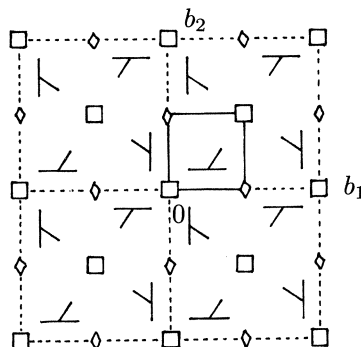
No. 8 (pgg). $C(F) = T(F) \cdot \{1_2, T_{1/2b_1} s_{\mathbb{R}b_1}, T_{1/2b_2} s_{\mathbb{R}b_2}, T_{1/2(b_1-b_2)} R_{\pi}^{(0)}\}$; $R(F)$ is een willekeurig rechthoekig rooster.



No. 9 (cmm). $C(F) = T(F) \cdot D_2$; $R(F)$ is een willekeurig ruitenrooster.

Geval $C_0(F) = C_4$.

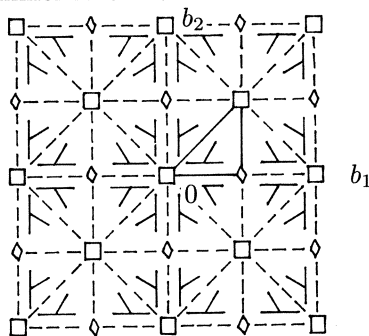
Dit is:



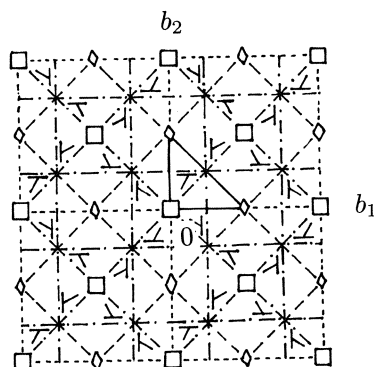
No. 10 (p4). $C(F)$ bevat een draaiing van $\pi/2$ en door eventueel F te verschuiven krijgen we: $R_{\pi/2}^{(0)} \in C(F)$; dan $C(F) = T(F) \cdot C_4$. Nu is $R(F)$ een willekeurig vierkantenrooster.

Geval $C_0(F) = D_4$.

Net als in het geval $C_0(F) = C_4$ mogen we veronderstellen: $R_{\pi/2}^{(0)} \in C(F)$. We hebben nu 2 gevallen; nummer 11 en nummer 12:



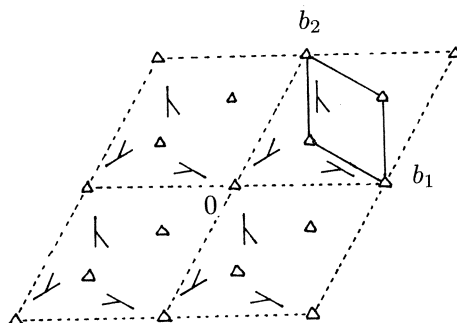
No. 11 (p4m). Ook $s_{\mathbb{R}b_1} \in C(F)$, en dan $C(F) = T(F) \cdot D_4$; $R(F)$ is een willekeurig vierkantenrooster.



No. 12 (p4g). Hier $s_{\mathbb{R}b_1} \notin C(F)$. Dan ook $s_{\mathbb{R}b_2} \notin C(F)$ (omdat D_4 voortgebracht wordt door $\{s_{\mathbb{R}b_2}, R_{\pi/2}^{(0)}\}$). Dan is er een vector $u_2 := \alpha_2 b_2$ met $0 \leq \alpha_2 < 1$ met $T_{u_2} T_{1/2b_1} s_{\mathbb{R}b_1} \in C(F)$ en een vector $u_1 := \alpha_1 b_1$ met $0 \leq \alpha_1 < 1$ met $T_{u_1} T_{1/2b_2} s_{\mathbb{R}b_2} \in C(F)$; dan ook $T_{u_2} T_{1/2b_1} s_{\mathbb{R}b_1} \cdot T_{u_1} T_{1/2b_2} s_{\mathbb{R}b_2} = T_{u_2 - 1/2b_2 + u_1 + 1/2b_1} R_{\pi}^{(0)} \in C(F)$, dus $u_2 - 1/2b_2 + u_1 + 1/2b_1 \in R(F)$, dus $\alpha_2 = 1/2, \alpha_1 = 1/2$. Dan $C(F) = T(F) \cdot C_4 \cup T(F) \cdot (T_{1/2b_2} T_{1/2b_1} s_{\mathbb{R}b_1}) \cdot C_4$; $R(F)$ is weer een willekeurig vierkantenrooster.

Geval $C_0(F) = C_3$.

Dit is:

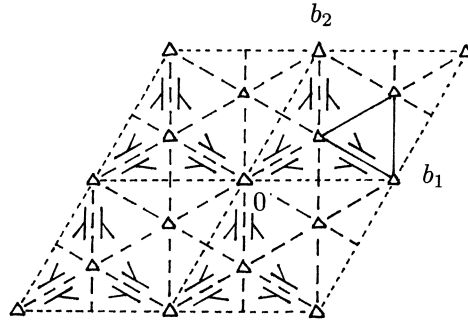


No. 13 (p3). $C(F)$ bevat een draaiing met orde 3 en we mogen veronderstellen: $R_{2\pi/3}^{(0)} \in C(F)$; dan $C(F) = T(F) \cdot C_3$. Kies b_1 als een vector $\neq 0$ met kleinste lengte in $R(F)$ en $b_2 := R_{2\pi/3}^{(0)}(b_1) + b_1$; dan is (b_1, b_2) een basis van $R(F)$ en $R(F)$ is een willekeurig rooster (bestaande uit de hoekpunten van een verdeling van \mathbb{R}_2 in onderling congruente gelijkzijdige driehoeken).

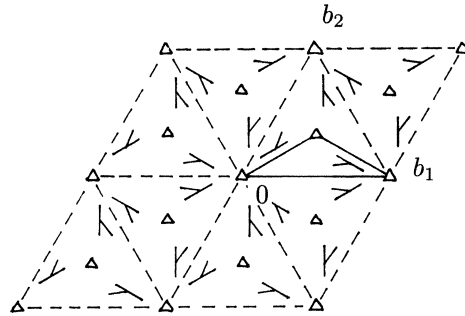
Geval $C_0(F) = D_3$.

We mogen weer veronderstellen dat $R_{2\pi/3}^{(0)}$ in $C(F)$ zit; kies een basis (b_1, b_2) van $R(F)$ als in het geval $C_0(F) = C_3$. Nu zijn er 2 mogelijkheden:

- (i) $C_0(F) = C_3 \cup C_3 s_{\mathbb{R}(b_1+b_2)}$, d.w.z. $s_{\mathbb{R}(b_1+b_2)} \in C_0(F)$; dit geeft nummer 14;
- (ii) $C_0(F) = C_3 \cup C_3 s_{\mathbb{R}b_1}$; d.w.z. $s_{\mathbb{R}b_1}$ in $C(F)$; dit geeft nummer 15.

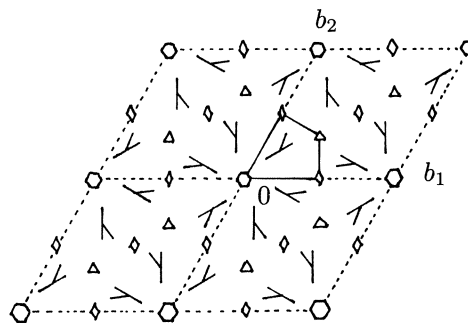


No. 14 (p3m1). Als bij No. 5 zien we dat $C(F)$ een spiegeling bevat in een lijn evenwijdig met $\mathbb{R}(b_1 + b_2)$; omdat ook $s_{\mathbb{R}(b_1 - b_2)} \in C_0(F)$, bevat $C(F)$ ook een spiegeling in een lijn evenwijdig met $\mathbb{R}(b_1 - b_2)$; door een verschuiving op F toe te passen kunnen we ervoor zorgen dat het snijpunt van deze 2 spiegellijnen de oorsprong is, d.w.z. dat $s_{\mathbb{R}(b_1 + b_2)}$ en $s_{\mathbb{R}(b_1 - b_2)}$ in $C(F)$ zitten; dan $C(F) = C_0(F) \cdot D_3$. Het rooster $R(F)$ is een willekeurig driehoekig rooster.



No. 15 (p31m). Net als in No. 14 kunnen we ervoor zorgen dat geldt: $C(F) = T(F) \cdot D_3$. Het rooster $R(F)$ is weer een willekeurig driehoekig rooster.

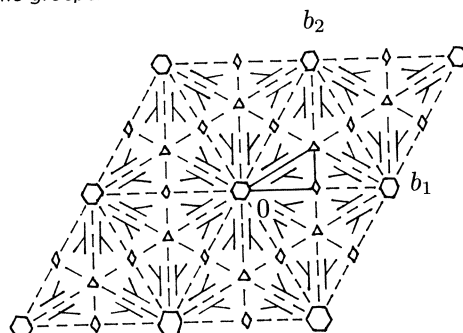
Geval $C_0(F) = C_6$.
Dit is:



No. 16 (p6). Te onderstellen: $R_{2\pi/6}^{(0)} \in C(F)$, d.w.z. $C(F) = T(F) \cdot C_6$; $R(F)$ is een willekeurig driehoekig rooster.

Geval $C_0(F) = D_6$.

Dit is:



No. 17 (p6m). Net als in No. 14 zien we dat we mogen aannemen: $C_0(F) \subset C(F)$, d.w.z. $C(F) = T(F) \cdot D_6$; $R(F)$ is weer een willekeurig driehoekig rooster.

LITERATUUR

Behalve de (equivalentie)klassen van 2-periodieke patronen in \mathbb{R}_2 (E.S. Fedorov, 1981) en de 3-periodieke patronen in \mathbb{R}_3 (Fedorov en Schoenflies) zijn nu ook de 4-periodieke patronen in \mathbb{R}_4 bekend: H. Brown, R. Bülow, J. Neubüser, H. Wondratschek en H. Zassenhaus, *Crystallographic groups of four-dimensional space*, Wiley, New York 1978. Voor euclidische kristallografische groepen in het algemeen zie bijv. R.L.E. Schwarzenberger, *N-dimensional crystallography*, Pitman, San Francisco 1980. Voor wat i.h.b. de vlakke periodieke patronen betreft, is lezing van een artikel van D. Schattschneider aanbevelenswaardig: The plane symmetry groups: their recognition and notation, *Amer. Math. Monthly* 85 ('78), 439–450. Hierin wordt ook ingegaan op de betekenis van de vlakke periodieke patronen in het werk van de bekende graficus M.C. Escher. In dit werk komen ook gekleurde periodieke patronen voor en verschillende van deze zijn opgenomen in een boek van C.H. MacGillavry, *Symmetry aspects of M.C. Escher's drawings*, Oosthoek, Utrecht 1965. De classificatie van de gekleurde vlakke patronen wordt behandeld in een artikel van J.D. Jarratt en R.L.E. Schwarzenberger: Coloured plane groups, *Acta Cryst.* A36 ('80), 884–888.

OPGAVEN

1. Een *involutie* in $E(n)$ is een element van $E(n)$ met orde 2. Bewijs:
 - (i) in $E(n)$ zijn precies n conjugatieklassen van involuties,
 - (ii) elk element van $E(n)$ is een involutie of een produkt van een paar involuties.
2. Bewijs voor $v, w \in \mathbb{R}_2$, $v \neq w$, $\phi, \psi \in \mathbb{R}$, $0 < \phi < 2\pi$, $0 < \psi < 2\pi$: $R_\phi^{(v)} R_\psi^{(w)} R_{-\phi}^{(v)} R_{-\psi}^{(w)}$ is een niet-identieke verschuiving.
3. Zij F een gesloten (in topologische zin) 0-periodiek patroon in \mathbb{R}_2 . Bewijs:

er is een natuurlijk getal m zó, dat $C(F)$ geconjugueerd is met C_m, D_m of met $O(2)$ (gebruik opgave 2).

4. Classificeer de equivalentieklassen van enkelperiodieke patronen in \mathbb{R}_2 ; deze 7 equivalentieklassen kunnen door de volgende figuren aangeduid worden:
 $\dots LLL \dots, \dots L \lceil L \dots, \dots VVV \dots, \dots NNN \dots,$
 $\dots \wedge \vee \wedge \dots, \dots E E E \dots, \dots H H H \dots.$

5. (i) Bewijs, voor $0 < \phi < 2\pi$, van w in \mathbb{R}_2 met $R_\phi^{(v)} = R_\phi^{(0)} T_w$:

$$v = \frac{1}{4 \sin^2 1/2\phi} \begin{pmatrix} \cos \phi - 1 & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi - 1 \end{pmatrix} w.$$

- (ii) Is R een $R_{\pi/3}^{(0)}$ -invariant 2-dimensionaal rooster in \mathbb{R}_2 , dan zijn de draaiingen over $\pi/3$ die R invariant laten juist de $R_{\pi/3}^{(v)}$ met $v \in R$; bewijs dit.
- (iii) Is R een $R_{2\pi/3}^{(0)}$ -invariant 2-dimensionaal rooster in \mathbb{R}_2 , met basis (b_1, b_2) met $b_2 = R_{2\pi/3}^{(0)}(b_1)$, dan zijn de draaiingen over $2\pi/3$ die R invariant laten juist de $R_{2\pi/3}^{(v)}$ met $v = 1/3(\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2)$ en $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Z}, \alpha_1 - \alpha_2 \in 3\mathbb{Z}$, bewijs dit.

6. Stel

$$a = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2\sqrt{3} & 0 \\ 1/2\sqrt{3} & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \text{ met } 0 < \theta \leq \pi.$$

Bewijs: als $abab^{-1}$ en $aba^{-1}b^{-1}$ geheel spoor hebben, dan $\cos \theta = 1/3$.

7. Zij $C_0(F)$ de puntgroep van een 3-periodiek patroon in \mathbb{R}_3 . Stel dat $C_0(F)$ draaiingen over $2\pi/3$ om verschillende assen bevat. Zij D de verzameling der snijpunten van de eenheidsbol om 0 met de assen van de draaiingen over $2\pi/3$ uit $C_0(F)$.

- (i) Bewijs: D is invariant onder $C_0(F)$.
- (ii) Bewijs: D is de verzameling der hoekpunten van een kubus K (gebruik opgave 6).
- (iii) Merk op dat er twee regelmatige viervlakken V_1 en V_2 zijn waarvan de hoekpunten ook hoekpunten van K zijn en dat elk element van $C_0(F)$ deze viervlakken verwisselt of invariant laat.
- (iv) Bewijs dat er voor $C_0(F)$ precies de volgende 5 mogelijkheden zijn:
1. $C_0(F)$ is de congruentiegroep $C(K)$ van de kubus K ,
 2. $C_0(F) = C(V_1) = C(V_2)$,
 3. $C_0(F) = C(K) \cap SO(3)$, d.w.z. $C_0(F)$ bestaat uit de draaiingen die K invariant laten,

4. $C_0(F) = C(V_1) \cap SO(3)$,
5. $C_0(F)$ bestaat uit de draaiingen uit $C(K)$ die V_1 invariant laten en de spiegelingen en draaispiegelingen uit $C(K)$ die V_1 en V_2 verwisselen.

(Deze 5 groepen zijn de puntgroepen van de zogenaamde kubische kristalssystemen.)

Merk hiervoor eerst op: $C(V_1) \cap SO(3) \subseteq C_0(F) \subseteq C(K)$, $C(K)/C(V_1) \cap SO(3) \cong C_2 \times C_2$.

CWI SYLLABI

- 1 Vacantiecursus 1984: *Hewet - plus wiskunde*. 1984.
- 2 E.M. de Jager, H.G.J. Pijls (eds.). *Proceedings Seminar 1981-1982. Mathematical structures in field theories*. 1984.
- 3 W.C.M. Kallenberg, et al. *Testing statistical hypotheses: worked solutions*. 1984.
- 4 J.G. Verwer (ed.). *Colloquium topics in applied numerical analysis, volume 1*. 1984.
- 5 J.G. Verwer (ed.). *Colloquium topics in applied numerical analysis, volume 2*. 1984.
- 6 P.J.M. Bongaarts, J.N. Buur, E.A. de Kerf, R. Martini, H.G.J. Pijls, J.W. de Roever. *Proceedings Seminar 1982-1983. Mathematical structures in field theories*. 1985.
- 7 Vacantiecursus 1985: *Variatierekening*. 1985.
- 8 G.M. Tuynman. *Proceedings Seminar 1983-1985. Mathematical structures in field theories, Vol.1 Geometric quantization*. 1985.
- 9 J. van Leeuwen, J.K. Lenstra (eds.). *Parallel computers and computations*. 1985.
- 10 Vacantiecursus 1986: *Matrices*. 1986.
- 11 P.W.H. Lemmens. *Discrete wiskunde: tellen, grafen, spelen en codes*. 1986.
- 12 J. van de Lune. *An introduction to Tauberian theory: from Tauber to Wiener*. 1986.
- 13 G.M. Tuynman, M.J. Bergvelt, A.P.E. ten Kroode. *Proceedings Seminar 1983-1985. Mathematical structures in field theories, Vol.2*. 1987.
- 14 Vacantiecursus 1987: *De personal computer en de wiskunde op school*. 1987.
- 15 Vacantiecursus 1983: *Complexe getallen*. 1987.
- 16 P.J.M. Bongaarts, E.A. de Kerf, P.H.M. Kersten. *Proceedings Seminar 1984-1986. Mathematical structures in field theories, Vol.1*. 1988.
- 17 F. den Hollander, H. Maassen (eds.). *Mark Kac seminar on probability and physics. Syllabus 1985-1987*. 1988.
- 18 Vacantiecursus 1988. *Differentierekening*. 1988.
- 19 R. de Bruin, C.G. van der Laan, J.R. Luyten, H.F. Vogt. *Publiceren met LATEX*. 1988.
- 20 R. van der Horst, R.D. Gill (eds.). *STATAL: statistical procedures in Algol 60, part 1*. 1988.
- 21 R. van der Horst, R.D. Gill (eds.). *STATAL: statistical procedures in Algol 60, part 2*. 1988.
- 22 R. van der Horst, R.D. Gill (eds.). *STATAL: statistical procedures in Algol 60, part 3*. 1988.
- 23 J. van Mill, G.Y. Nieuwland (eds.). *Proceedings van het symposium wiskunde en de computer*. 1989.
- 24 P.W.H. Lemmens (red.). *Bewijzen in de wiskunde*. 1989.
- 25 Vacantiecursus 1989: *Wiskunde in de Gouden Eeuw*. 1989.
- 26 G.G.A. Bäuerle et al. *Proceedings Seminar 1986-1987. Mathematical structures in field theories*. 1990.
- 27 Vacantiecursus 1990: *Getallentheorie en haar toepassingen*. 1990.
- 28 Vacantiecursus 1991: *Meetkundige structuren*. 1991.
- 29 A.G. van Asch, F. van der Blij. *Hoeken en hun Maat*. 1992.
- 30 M.J. Bergvelt, A.P.E. ten Kroode. *Proceedings seminar 1986-1987. Lectures on Kac-Moody algebras*. 1992.
- 31 Vacantiecursus 1992: *Systeemtheorie*. 1992.
- 32 F. den Hollander, H. Maassen (eds.). *Mark Kac seminar on probability and physics. Syllabus 1987-1992*. 1992.
- 33 P.W.H. Lemmens (ed.). *Meetkunde van kunst tot kunde, vroeger en nu*. 1993.
- 34 J.H. Kruizinga. *Toegepaste wiskunde op een PC*. 1992.

MC SYLLABI

- 1.1 F. Göbel, J. van de Lune. *Leergang beslistkunde, deel 1: wiskundige basiskennis*. 1965.
- 1.2 J. Hemelrijk, J. Kriens. *Leergang beslistkunde, deel 2: kansberekening*. 1965.
- 1.3 J. Hemelrijk, J. Kriens. *Leergang beslistkunde, deel 3: statistiek*. 1966.
- 1.4 G. de Leve, W. Molenaar. *Leergang beslistkunde, deel 4: Markovketens en wachttijden*. 1966.
- 1.5 J. Kriens, G. de Leve. *Leergang beslistkunde, deel 5: inleiding tot de mathematische beslistkunde*. 1966.
- 1.6a B. Dorhout, J. Kriens. *Leergang beslistkunde, deel 6a: wiskundige programmering 1*. 1968.
- 1.6b B. Dorhout, J. Kriens, J.Th. van Lieshout. *Leergang beslistkunde, deel 6b: wiskundige programmering 2*. 1977.
- 1.7a G. de Leve. *Leergang beslistkunde, deel 7a: dynamische programmering 1*. 1968.
- 1.7b G. de Leve, H.C. Tijms. *Leergang beslistkunde, deel 7b: dynamische programmering 2*. 1970.
- 1.7c G. de Leve, H.C. Tijms. *Leergang beslistkunde, deel 7c: dynamische programmering 3*. 1971.
- 1.8 J. Kriens, F. Göbel, W. Molenaar. *Leergang beslistkunde, deel 8: minimaxmethode, netwerkplanning, simulatie*. 1968.
- 2.1 G.J.R. Förch, P.J. van der Houwen, R.P. van de Riet. *Colloquium stabiliteit van differentieschema's, deel 1*. 1967.
- 2.2 L. Dekker, T.J. Dekker, P.J. van der Houwen, M.N. Spijker. *Colloquium stabiliteit van differentieschema's, deel 2*. 1968.
- 3.1 H.A. Lauwerier. *Randwaardeproblemen, deel 1*. 1967.
- 3.2 H.A. Lauwerier. *Randwaardeproblemen, deel 2*. 1968.
- 3.3 H.A. Lauwerier. *Randwaardeproblemen, deel 3*. 1968.
- 4 H.A. Lauwerier. *Representaties van groepen*. 1968.
- 5 J.H. van Lint, J.J. Seidel, P.C. Baayen. *Colloquium discrete wiskunde*. 1968.
- 6 K.K. Kokma. *Cursus ALGOL 60*. 1969.
- 7.1 *Colloquium moderne rekenmachines, deel 1*. 1969.
- 7.2 *Colloquium moderne rekenmachines, deel 2*. 1969.
- 8 H. Bavinck, J. Grasman. *Relaxatietrillingen*. 1969.
- 9.1 T.M.T. Coolen, G.J.R. Förch, E.M. de Jager, H.G.J. Pijs. *Colloquium elliptische differentiaalvergelijkingen, deel 1*. 1970.
- 9.2 W.P. van den Brink, T.M.T. Coolen, B. Dijkhuis, P.P.N. de Groen, P.J. van der Houwen, E.M. de Jager, N.M. Temme, R.J. de Vogelaere. *Colloquium elliptische differentiaalvergelijkingen, deel 2*. 1970.
- 10 J. Fabius, W.R. van Zwet. *Grondbegrippen van de waarschijnlijkheidsrekening*. 1970.
- 11 H. Bart, M.A. Kaashoek, H.G.J. Pijs, W.J. de Schipper, J. de Vries. *Colloquium halfalgebra's en positieve operatoren*. 1971.
- 12 T.J. Dekker. *Numerieke algebra*. 1971.
- 13 F.E.J. Kruseman Aretz. *Programmeren voor rekenautomaten; de MC ALGOL 60 vertaler voor de EL X8*. 1971.
- 14 H. Bavinck, W. Gautschi, G.M. Willems. *Colloquium approximatietheorie*. 1971.
- 15.1 T.J. Dekker, P.W. Hemker, P.J. van der Houwen. *Colloquium stijve differentiaalvergelijkingen, deel 1*. 1972.
- 15.2 P.A. Beentjes, K. Dekker, H.C. Hemker, S.P.N. van Kampen, G.M. Willems. *Colloquium stijve differentiaalvergelijkingen, deel 2*. 1973.
- 15.3 P.A. Beentjes, K. Dekker, P.W. Hemker, M. van Veldhuizen. *Colloquium stijve differentiaalvergelijkingen, deel 3*. 1975.
- 16.1 L. Geurts. *Cursus programmeren, deel 1: de elementen van het programmeren*. 1973.
- 16.2 L. Geurts. *Cursus programmeren, deel 2: de programmeertaal ALGOL 60*. 1973.
- 17.1 P.S. Stobbe. *Lineaire algebra, deel 1*. 1973.
- 17.2 P.S. Stobbe. *Lineaire algebra, deel 2*. 1973.
- 17.3 N.M. Temme. *Lineaire algebra, deel 3*. 1976.
- 18 F. van der Blij, H. Freudenthal, J.J. de Iongh, J.J. Seidel, A. van Wijngaarden. *Een kwart eeuw wiskunde 1946-1971, syllabus van de vakantiecursus 1971*. 1973.
- 19 A. Hordijk, R. Potharst, J.Th. Runnenburg. *Optimaal stoppen van Markovketens*. 1973.
- 20 T.M.T. Coolen, P.W. Hemker, P.J. van der Houwen, E. Slagt. *ALGOL 60 procedures voor begin- en randwaardeproblemen*. 1976.
- 21 J.W. de Bakker (red.). *Colloquium programmacorrectheid*. 1975.
- 22 R. Helmers, J. Oosterhoff, F.H. Ruymgaart, M.C.A. van Zuylen. *Asymptotische methoden in de toetsingstheorie; toepassing van naburigheid*. 1976.
- 23.1 J.W. de Roever (red.). *Colloquium onderwerpen uit de biomathematica, deel 1*. 1976.
- 23.2 J.W. de Roever (red.). *Colloquium onderwerpen uit de biomathematica, deel 2*. 1977.
- 24.1 P.J. van der Houwen. *Numerieke integratie van differentiaalvergelijkingen, deel 1: eenstapsmethoden*. 1974.
- 25 *Colloquium structuur van programmeertalen*. 1976.
- 26.1 N.M. Temme (ed.). *Nonlinear analysis, volume 1*. 1976.
- 26.2 N.M. Temme (ed.). *Nonlinear analysis, volume 2*. 1976.
- 27 M. Bakker, P.W. Hemker, P.J. van der Houwen, S.J. Polak, M. van Veldhuizen. *Colloquium discretiseringsmethoden*. 1976.
- 28 O. Diekmann, N.M. Temme (eds.). *Nonlinear diffusion problems*. 1976.
- 29.1 J.C.P. Bus (red.). *Colloquium numerieke programmatuur, deel 1A, deel 1B*. 1976.
- 29.2 H.J.J. te Riele (red.). *Colloquium numerieke programmatuur, deel 2*. 1977.
- 30 J. Heering, P. Klint (red.). *Colloquium programmeeromgevingen*. 1983.
- 31 J.H. van Lint (red.). *Inleiding in de coderingstheorie*. 1976.
- 32 L. Geurts (red.). *Colloquium bedrijfssystemen*. 1976.
- 33 P.J. van der Houwen. *Berekening van waterstanden in zeeën en rivieren*. 1977.
- 34 J. Hemelrijk. *Oriënterende cursus mathematische statistiek*. 1977.
- 35 P.J.W. ten Hagen (red.). *Colloquium computer graphics*. 1978.
- 36 J.M. Aarts, J. de Vries. *Colloquium topologische dynamische systemen*. 1977.
- 37 J.C. van Vliet (red.). *Colloquium capita datastructuren*. 1978.
- 38.1 T.H. Koornwinder (ed.). *Representations of locally compact groups with applications, part I*. 1979.
- 38.2 T.H. Koornwinder (ed.). *Representations of locally compact groups with applications, part II*. 1979.
- 39 O.J. Vrieze, G.L. Wanrooy. *Colloquium stochastische spelen*. 1978.
- 40 J. van Tiel. *Convexe analyse*. 1979.
- 41 H.J.J. te Riele (ed.). *Colloquium numerical treatment of integral equations*. 1979.
- 42 J.C. van Vliet (red.). *Colloquium capita implementatie van programmeertalen*. 1980.
- 43 A.M. Cohen, H.A. Wilbrink. *Eindige groepen (een inleidende cursus)*. 1980.
- 44 J.G. Verwer (ed.). *Colloquium numerical solution of partial differential equations*. 1980.
- 45 P. Klint (red.). *Colloquium hogere programmeertalen en computerarchitectuur*. 1980.
- 46.1 P.M.G. Apers (red.). *Colloquium databankorganisatie, deel 1*. 1981.
- 46.2 P.G.M. Apers (red.). *Colloquium databankorganisatie, deel 2*. 1981.
- 47.1 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60: general information and indices*. 1981.
- 47.2 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, vol. 1: elementary procedures; vol. 2: algebraic evaluations*. 1981.
- 47.3 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, vol. 3A: linear algebra, part I*. 1981.
- 47.4 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, vol. 3B: linear algebra, part II*. 1981.
- 47.5 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, vol. 4: analytical evaluations; vol. 5A: analytical problems, part I*. 1981.
- 47.6 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, vol. 5B: analytical problems, part II*. 1981.
- 47.7 P.W. Hemker (ed.). *NUMAL, numerical procedures in ALGOL 60, vol. 6: special functions and constants; vol. 7: interpolation and approximation*. 1981.
- 48.1 P.M.B. Vitányi, J. van Leeuwen, P. van Emde Boas (red.). *Colloquium complexiteit en algoritmen, deel 1*. 1982.
- 48.2 P.M.B. Vitányi, J. van Leeuwen, P. van Emde Boas (red.). *Colloquium complexiteit en algoritmen, deel 2*. 1982.
- 49 T.H. Koornwinder (ed.). *The structure of real semisimple Lie groups*. 1982.
- 50 H. Nijmeijer. *Inleiding systeemtheorie*. 1982.
- 51 P.J. Hoogendoorn (red.). *Cursus cryptografie*. 1983.

